DOI: http://dx.doi.org/10.21686/2413-2829-2022-4-43-48

ЭФФЕКТИВНЫЙ КАПИТАЛ В УСОВЕРШЕНСТВОВАННОЙ МАКРОМОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СОЛОУ

А. Ю. Меерсон
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Москва, Россия
А. П. Черняев
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

В статье макроэкономическая теория экономического роста Солоу рассматривается в усложненном случае, когда технический прогресс является воплощенным в капитале. При этом производственная функция зависит от эффективного капитала и трудового ресурса. Авторами детально исследуется эффективность капитала. Обыкновенное дифференциальное уравнение баланса для капитала выводится на основе главного экономического тождества: доход, т. е. выпуск промышленной продукции, равен сумме потребления и инвестиций. На основании обыкновенного дифференциального уравнения баланса для капитала получено обыкновенное дифференциальное уравнение для капиталовооруженности. Темпы роста эффективности капитала, трудового ресурса, нормы накопления и темпы амортизации капитала задаются экзогенно. В ходе исследования установлено, что это уравнение имеет существенные отличия от аналогичного обыкновенного дифференциального уравнения для капиталовооруженности в случае, когда технический прогресс является воплощенным в труде.
Ключевые слова: производственная функция, эффективность капитала, капиталовооруженность, уравнение для капиталовооруженности.

EFFECTIVE CAPITAL IN UPGRADED SOLOW MACRO-MODEL OF ECONOMIC GROWTH

Alla Yu. Meerson
Plekhanov Russian University of Economics,
Moscow, Russia
Aleksandr P. Chernyaev
Moscow Institute of Physics and Technology,
Dolgoprudny, Russia

The article studies the macro-economic theory of economic growth Solow in complicated case, when technical progress is materialized in capital. In this situation the production function depends on effective capital and labour resource. The authors research in detail the efficiency of capital. As a rule differential equation of balance for the capital is deduced on the basis of the principle economic identity: profit, i. e. output of industrial products is equal to the sum total of consumption and investment. On the basis of ordinary differential equation of balance for the capital it is possible to obtain the ordinary differential equation for capital-labour ratio. The rates of capital efficiency growth, labour reserve, norms of accumulation and rates of capital amortization are set exogenously. The research shows that this equation differs seriously from similar ordinary differential equation for capital-labour ratio in case technical progress is materialized in labour.
Keywords: production function, capital efficiency, capital-labour ratio, equation for capital–labour ratio.

Введение

Для каждого предприятия, производящего товары, доступна технология, которая может быть задана некоторой производственной функцией [5; 7–9]. Цель предприятий – получить максимальную прибыль. Моделирование воплощенности в капитале технического прогресса происходит за счет усложненной производственной функции, которая в этом случае зависит от двух переменных: эффективного капитала и трудового ресурса.

Эффективность капитала является частью эффективного капитала и входит в последний в качестве множителя. Весь полученный доход от труда и эффективного капитала, а также прибыль, если она есть, в каждый момент времени делятся между потреблением и инвестициями. Именно поэтому обыкновенное дифференциальное уравнение баланса для капитала выводится с учетом главного экономического тождества: доход, т. е. выпуск промышленной продукции, равен сумме потребления и инвестиций. На основании уравнения баланса для капитала получено обыкновенное дифференциальное уравнение для капиталовооруженности. Темпы роста эффективности капитала, трудового ресурса, нормы накопления и темпы амортизации капитала задаются экзогенно. Вместе с тем это уравнение имеет существенные отличия от аналогичного уравнения для капиталовооруженности в случае, когда технический прогресс является воплощенным в труде, в силу различия производственных функций и определений капиталовооруженности.

Свойства производственной функции

Для каждого предприятия имеется технология в виде производственной функции, которая удовлетворяет ряду свойств.

Производственная функция в простейшем случае может быть записана в следующем виде:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)), \tag{1}$$

где t – время, которое считаем непрерывным;

$Y = Y(t) \geq 0$ – выпуск или доход;

$K = K(t) \geq 0$ – капитал;

$L = L(t) \geq 0$ – труд.

Вместе с тем в формуле (1) не учитывается технический прогресс, поскольку в нее не входит эффективность труда.

Рассмотрим более сложный случай, а именно когда производственная функция записывается в виде

$$Y(t) = F(A(t)K(t), L(t)). \tag{2}$$

В формуле (2) $A = A(t) \geq 0$ назовем эффективностью, а под $K(t)$ традиционно будем понимать капитал. Тогда $A(t)K(t)$ будет эффективным капиталом. Описываемый формулой (2) технический прогресс будет воплощенным в капитале.

Ясно, что если для формулы (1) справедливо равенство

$$\forall c = c(t) \geq 0,$$
$$F(c(t)K(t), c(t)L(t)) = c(t)F(K(t), L(t)),$$

то при той же самой функции F справедливо и равенство

$$\forall c = c(t) \geq 0,$$
$$F(c(t)A(t)K(t), c(t)L(t)) = c(t)F(A(t)K(t), L(t)). \tag{3}$$

Положим в формуле (3) $c(t) = [L(t)]^{-1}$, тогда

$$F(A(t)K(t)[L(t)]^{-1}, 1) = [L(t)]^{-1}F(A(t)K(t), L(t)). \tag{4}$$

Выражение $A(t)K(t)\ [L(t)]^{-1}$ назовем эффективной капиталовооруженностью труда, а произведение $[L(t)]^{-1}F(A(t)K(t), L(t))$, которое в силу (2) равно $Y[L(t)]^{-1}$, – эффективным выпуском продукции на единицу труда. Введем новые переменные:

$$k = k(t) = A(t)K(t)\ [L(t)]^{-1}, \tag{5}$$

$$y = y(t) = Y(t)[L(t)]^{-1}, \tag{6}$$

$$f(k(t)) = F(A(t)K(t)[L(t)]^{-1}, 1). \tag{7}$$

Подставляя (5), (6) и (7) в (4), имеем

$$y(t) = f(k(t)). \tag{8}$$

Формула (8) имеет экономический смысл. Действительно, левая часть формулы – эффективный выпуск продукции на единицу труда, а правая часть – это эффективная капиталовооруженность труда.

Пример производственной функции

В качестве примера производственной функции приведем аналог функции Кобба – Дугласа:

$$F(A(t)K(t), L(t)) = (A(t)K(t))^{\lambda}(L(t))^{1-\lambda}\,.\ \lambda \in (0,1). \quad (9)$$

Проверим для (9) справедливость формулы (3):

$$F(c(t)A(t)K(t), c(t)L(t)) =$$
$$= (c(t)A(t)(K(t))^{\alpha} (c(t)L(t))^{1-\alpha} =$$
$$= [c(t)]^{\alpha}[c(t)]^{1-\alpha} (A(t)(K(t))^{\alpha} (L(t))^{1-\alpha} =$$
$$= c(t)F(A(t)K(t), L(t)). \quad (10)$$

Интенсивная форма производственной функции получается путем умножения обоих аргументов этой функции на величину, обратную труду:

$$f(k(t)) = F(A(t)K(t)[L(t)]^{-1}, 1) =$$
$$= (A(t)K(t)[L(t)]^{-1})^{\lambda} = (k(t))^{\lambda}. \quad (11)$$

Взяв производную от левой и правой частей формулы (11) по капиталовооруженности, получим

$$f'(k(t)) = \lambda(k(t))^{\lambda-1}. \quad (12)$$

При рассмотрении уравнений (9), (11) и (12) устанавливается, что $f(k(t))$ и $f'(k(t))$ положительны. Кроме этого, если $k(t) \to +\infty$, то $f(k(t)) \to +\infty$ и $f'(k(t)) \to 0$. Если же $k(t) \to 0$, то $f(k(t)) \to 0$ и $f'(k(t)) \to +\infty$.

Для второй производной функции (11) по капиталовооруженности

$$f''(k(t)) = \lambda(\lambda-1)(k(t))^{\lambda-2} \quad (13)$$

имеем $f''(k(t)) < 0$ для всех значений (13).

Темпы динамики труда и капитала

В начальный момент времени значения труда и капитала будем считать заданными.

Пусть v – темп прироста работников, занятых в производстве, т. е. темп прироста трудовых ресурсов. Тогда

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = v. \quad (14)$$

Аналогичное предположение делаем относительно эффективности капитала:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dt} = \sigma. \quad (15)$$

Материальные средства, вырученные от реализации произведенного продукта $Y(t)$, тратятся на $C(t)$ – расход, который мы отождествляем с потреблением, и $I(t)$ – накопления, которые отождествляем с инвестициями:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (16)$$

Норма накопления $I(t)$ обозначается через ρ и является экзогенно заданной величиной:

$$I(t) = \rho Y(t). \quad (17)$$

Уравнение баланса для капитала запишем из следующих соображений: мгновенная скорость изменения капитала равна разности прихода капитала, задаваемого формулой (17), и расхода капитала, под которым понимается амортизация накопленного капитала с темпом μ:

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y(t) - \mu K(t). \quad (18)$$

Отметим, что в предлагаемой экономической схеме не рассматривается влияние власти на экономику. Также считаем, что в работе предприятий участвуют все жители социального организма. Это не умаляет общности рассматриваемой схемы, так как если кто-то не работает на каком-либо предприятии, то он обслуживает работающих членов своей семьи. В этом случае можно считать его работником предприятия по оказанию услуг данной семье.

Характер поведения капиталовооруженности

Изучим мгновенную скорость капиталовооруженности труда. Для этого нам понадобятся характер поведения трудовых ресурсов, который задается формулой (14), и темп изменения эффективности, определяемый формулой (15). Уравнение баланса капитала (18) является для этой цели лишь первым шагом. Наиболее удобной переменной для исследования является капиталовооруженность трудовых ресурсов. Так как $k(t) = A(t)K(t)[L(t)]^{-1}$, то

$$\frac{dk}{dt} = \frac{(A(t)K(t))'\,L(t) - A(t)K(t)\,L'(t)}{L^2(t)} = \frac{A'(t)K(t) + A(t)K'(t)}{L(t)} - A(t)K(t)\frac{L'(t)}{L^2(t)}. \quad (19)$$

Преобразуем эту формулу с учетом выражения (18):

$$\frac{dk}{dt}=\frac{A'(t)K(t)+A(t)K'(t)}{L(t)}-A(t)K(t)\frac{L'(t)}{L^2(t)}=A'(t)\frac{K(t)}{L(t)}+\frac{A(t)}{L(t)}(\rho Y(t)-\mu K(t))-\frac{A(t)K(t)}{L(t)}\nu.$$

Упростим последнее равенство:

$$\frac{dk}{dt}=\frac{A'(t)}{A(t)}\frac{A(t)K(t)}{L(t)}+\rho\frac{A(t)Y(t)}{L(t)}-\mu\frac{A(t)K(t)}{L(t)}-\nu\frac{A(t)K(t)}{L(t)}.$$

Принимая во внимание выражения (14) и (15), из последнего равенства имеем

$$\frac{dk}{dt}=\rho A(t)f(k)+\sigma k-\mu k-\nu k. \qquad (20)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (20) является основным, описывающим динамику макромодели Солоу с техническим прогрессом, воплощенным в капитале, задаваемым производственной функцией (2). Эффективный капитал $A(t)K(t)$ входит в производственную функцию согласно формуле (2). Уравнение (20) описывает мгновенную скорость капиталовооруженности трудовых ресурсов при помощи двух слагаемых.

Выражение

$$\rho A(t)f(k), \qquad (21)$$

являющееся первым слагаемым правой части обыкновенного дифференциального уравнения (20), пропорционально норме накопления. Оно отличается от аналогичного первого слагаемого правой части обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего динамику макромодели Солоу с техническим прогрессом, воплощенным в труде. Этот технический прогресс задается другой производственной функцией, в которую вместо эффективного капитала входит эффективный труд. В это обыкновенное дифференциальное уравнение для капиталовооруженности в случае технического прогресса, воплощенного в труде, эффективность труда, которая обозначается также $A(t)$, не входит. Так что уравнение (20) сложнее аналогичного уравнения, описывающего технический прогресс, воплощенный в труде, поскольку формула (21) имеет дополнительный множитель $A(t)$.

Второе слагаемое правой части уравнения (20)

$$\sigma k-\mu k-\nu k=(\sigma-\mu-\nu)\,k \qquad (22)$$

также отличается от аналогичного второго слагаемого правой части обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего динамику макромодели Солоу с техническим прогрессом, воплощенным в труде. Кардинальное отличие заключается в знаке, с которым входит в это слагаемое темп показателя эффективности капитала (15). Экономический смысл слагаемого (22) с обратным знаком – это также восстанавливающие накопления, объем которых достаточен для поддержания капиталовооруженности $k = k(t)$ на существующем стабилизационном уровне.

Стабилизационный уровень капиталовооруженности обеспечивается двумя причинами.

Первая причина указанной поддержки – это амортизация капитала. По этой причине необходимо обновление капитала, чтобы поддерживать объем капиталовооруженности на стабилизационном уровне. Этим объясняется присутствие слагаемого μk в формуле (22).

Вторая причина указанной поддержки – это рост темпа прироста труда. Именно этим объясняется присутствие в выражении (22) слагаемого νk.

Темп прироста эффективности капитала (15) входит в формулу (22) с другим знаком, что показывает бóльшую эффективность технического прогресса, воплощенного в капитале, чем технического прогресса, воплощенного в труде.

Превышение уровня фактических инвестиций на единицу труда над уровнем восстанавливающих инвестиций обеспечивает рост капиталовооруженности $k = k(t)$. Недостаток уровня фактических инвестиций на единицу труда над уровнем восстанавливающих инвестиций приводит к убыванию капиталовооруженности $k = k(t)$. В случае равенства объемов фактических и восстанавливающих инвестиций имеет место равенство капиталовооруженности $k = k(t)$ во времени.

Заключение

Случай, когда технический прогресс воплощен в капитале, является усложненным вариантом макроэкономической модели Солоу [1–4; 6]. Отличия этого случая от технического прогресса, воплощенного в труде, весьма значительные. В рассматриваемом в настоящей статье случае производственная функция зависит от двух аргументов: эффективного капитала и трудового ресурса. Различия производственных функций и определений капиталовооруженности объясняют полученную разницу рассматриваемого технологического прогресса, воплощенного в капитале, и технологического прогресса, воплощенного в труде.

Список литературы

1. *Замулин О. А., Сонин К. И.* Экономический рост 2018 года и уроки для России // Вопросы экономики. – 2019. – № 1. – С. 11–36.

2. *Ковалева Т. Ю.* Статистическое изучение взаимосвязи динамики производительности труда и фондовооруженности в структурах РФ // Приволжский научный вестник. – 2015. – № 7 (47). – С. 85–91.

3. *Красносельская Д. Х.* Сравнительный анализ моделей экономического роста Р. Солоу и Мэнкью – Ромера – Уэйла (на примере Республики Башкортостан) // Креативная экономика. – 2013. – Т. 7. – № 9. – С. 14–23.

4. *Меерсон А. Ю., Черняев А. П.* Варианты постановки задач оптимизации обобщенной полезности потребления в модели Солоу с ограничениями различного рода // Фундаментальные исследования. – 2018. – № 7. – С. 121–125.

5. *Меерсон А. Ю., Черняев А. П.* Задачи оптимального управления среднедушевым потреблением с уравнением связи для капиталовооруженности // Труды МФТИ. – 2019. – Т. 11. – № 2. – С. 27–37.

6. *Меерсон А. Ю., Черняев А. П.* Интегральный метод исследования переходного режима в модели Солоу // Экономика природопользования. – 2010. – № 3. – С. 105–109.

7. *Оленев Н. Н.* Производственная функция с учетом ограничения производственных мощностей по возрасту // Труды МФТИ. – 2017. – Т. 9. – № 3. – С. 143–150.

8. *Solow R. M.* Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. – 1956. – Vol. 70. – N 1. – P. 65–94.

9. *Solow R. M.* Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. – 1957. – Vol. 39. – N 3. – P. 312–320.

References

1. Zamulin O. A., Sonin K. I. Ekonomicheskiy rost 2018 goda i uroki dlya Rossii [Economic Growth in 2018 and Lessons for Russia]. *Voprosy ekonomiki*, 2019, No. 1, pp. 11–36. (In Russ.).

2. Kovaleva T. Yu. Statisticheskoe izuchenie vzaimosvyazi dinamiki proizvoditelnosti truda i fondovooruzhennosti v strukturakh RF [Statistical Study of the Relationship between the Dynamics of Labor Productivity and Capital-Labor Ratio in the Structures of the Russian Federation]. *Privolzhskiy nauchnyy vestnik* [Privolzhsky Scientific Bulletin], 2015, No. 7 (47), pp. 85–91. (In Russ.).

3. Krasnoselskaya D. Kh. Sravnitelnyy analiz modeley ekonomicheskogo rosta R. Solou i Menkyu – Romera – Ueyla (na primere Respubliki Bashkortostan) [Comparative Analysis of

Economic Growth Models by R. Solow and Mankiw-Rohmer-Wail (on the example of the Republic of Bashkortostan)]. *Kreativnaya ekonomika* [Creative Economy], 2013, Vol. 7, No. 9, pp. 14–23. (In Russ.).

4. Meerson A. Yu., Chernyaev A. P. Varianty postanovki zadach optimizatsii obobshchennoy poleznosti potrebleniya v modeli Solou s ogranicheniyami razlichnogo roda [Variants of Setting Problems for Optimizing the Generalized Utility of Consumption in the Solow Model with Various Kinds of Constraints]. *Fundamentalnye issledovaniya* [Fundamental Research], 2018, No. 7, pp. 121–125. (In Russ.).
5. Meerson A. Yu., Chernyaev A. P. Zadachi optimalnogo upravleniya srednedushevym potrebleniem s uravneniem svyazi dlya kapitalovooruzhennosti [Problems of Optimal Control of Average per Capita Consumption with the Relation Equation for Capital-Labor Ratio]. *Trudy MFTI* [Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology], 2019, Vol. 11, No. 2, pp. 27–37. (In Russ.).
6. Meerson A. Yu., Chernyaev A. P. Integralnyy metod issledovaniya perekhodnogo rezhima v modeli Solou [Integral Method for Studying the Transitional Regime in the Solow model]. *Ekonomika prirodopolzovaniya* [Economics of Environmental Management], 2010, No. 3, pp. 105–109. (In Russ.).
7. Olenev N. N. Proizvodstvennaya funktsiya s uchetom ogranicheniya proizvodstvennykh moshchnostey po vozrastu [Production Function Taking into Account the Limitation of Production Capacities by Age]. *Trudy MFTI* [Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology], 2017, Vol. 9, No. 3, pp. 143–150. (In Russ.).
8. Solow R. M. Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 1956, Vol. 70, No. 1, pp. 65–94.
9. Solow R. M. Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*, 1957, Vol. 39, No. 3, pp. 312–320.

Сведения об авторах

Алла Юрьевна Меерсон
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математических
методов в экономике РЭУ им. Г. В. Плеханова.
Адрес: ФГБОУ ВО «Российский экономический
университет имени Г. В. Плеханова»,
117997, Москва, Стремянный пер., д. 36.
E-mail: allameerson@yandex.ru

Александр Петрович Черняев
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
МФТИ.
Адрес: ФГАОУ ВО «Московский физико-
технический институт (национальный
исследовательский университет)»,
141701, Долгопрудный, Московская обл.,
Институтский пер., д. 9.
E-mail: chernyaev49@yandex.ru

Information about the authors

Alla Yu. Meerson
PhD, Assistant Professor
of the Department for Mathematical
Methods in Economics of the PRUE.
Address: Plekhanov Russian University
of Economics, 36 Stremyannyy Lane,
Moscow, 117997, Russian Federation.
E-mail: allameerson@yandex.ru

Aleksandr P. Chernyaev
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department
for Higher Mathematics of the MIPT.
Address: Moscow Institute of Physics
and Technology, 9 Institutskiy Lane,
Moscow Region,
Dolgoprudny, 141701,
Russian Federation.
E-mail: chernyaev49@yandex.ru