DOI: http://dx.doi.org/10.21686/2413-2829-2023-14-24

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Ю. Проскуряков
Муромский институт (филиал) ФГБОУ ВО
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»,
Муром, Россия

В статье показана динамика стоимостных показателей рынка цифровых финансовых активов. Предметом исследования являются методы теории чувствительности в задачах оптимального управления нелинейными системами для автоматизированного мониторинга и управления портфелем цифровых финансовых активов и криптовалют. Рассмотрены проблемы моделирования процессов в экономических системах, определена задача оптимального управления в форме системы нелинейных дифференциальных уравнений и оптимизируемого целевого функционала, описаны вариационный метод решения данной задачи, принцип инвариантности нелинейных систем и предоставляемые решением возможности моделирования экономических систем. Анализируется подход к рассмотрению динамики экономических систем на основе принципа максимума. Показано применение подхода для решения задачи оптимизации и к методам управления, имеющим кусочно-непрерывный характер, в условиях неопределенности, присущей экономическим системам. Определены функции чувствительности нелинейных систем. Рассматривается применение теории чувствительности для задач оптимального управления нелинейными системами на примере оценки вектора неизвестных параметров динамической системы. Проводится критический анализ состояния в задачах экономического моделирования с учетом неопределенности, обусловленной социальными и психологическими причинами. Представленный в статье материал показывает возможности использования методов анализа чувствительности к задачам декомпозиции систем и сопутствующим преобразованиям систем дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: математические модели, нелинейные системы, цифровые финансовые активы, моделирование экономических процессов.

VARIATION APPROACH AND PRINCIPLE OF MAXIMUM IN THEORY OF DYNAMIC SYSTEMS

Alexander Yu. Proskuryakov
Murom Institute (branch) of the Vladimir State University,
Murom, Russia

The article shows dynamics of value figures on market of digital finance assets. The research studies methods of the sensitivity theory in tasks of optimal management of non-linear systems for automated monitoring and controlling the portfolio of digital finance assets and crypto-currencies. The authors study process modeling in economic systems, set the task of optimal management by the system of non-linear differential equations and target functionality, describe the variation method of task resolving, the principle of invariability of non-linear systems and possibilities to model economic systems provided by the solution. The approach to investigating dynamics of economic systems based on the principle of maximum was analyzed. The article shows possible application of the approach for resolving optimization tasks and for methods of management with split and continuous character in conditions of uncertainty typical of economic systems. Functions of non-linear sensitivity are identified. The use of the sensitivity theory for tasks of optimal management of non-linear systems was studied, illustrated by estimating the vector of unknown parameters of dynamic system. The authors analyze the condition in tasks of economic

modeling with regard to uncertainty caused by social and psychological reasons. The material provided in the article shows possibilities of using the method of sensitivity analysis for tasks of system decomposition and related transformations in systems of differential equations.
Keywords: mathematic models, non-linear systems, digital finance assets, modeling economic processes.

Введение

Федеральный закон от 31 июля 2020 г. № 259-ФЗ «О цифровых финансовых активах, цифровой валюте и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации» вступил в силу 1 января 2021 г. В связи с растущим интересом со стороны общества в новой цифровой финансовой среде и современными условиями развития IT-технологий все больше развиваются направления цифровых валют и цифровых финансовых активов (ЦФА). Высокий технологический уровень последних с криптографическим стойким шифрованием позволяет использовать новый вид финансовых инструментов в интересах национальной безопасности.

Существенный рост рынков криптовалют и ЦФА, потребность в новых трансграничных безопасных и стабильных финансовых каналах приводят к необходимости создания инструментов управления ими, а также проведения экономических исследований и математического моделирования финансовых циклов [13].

Экономические системы, которые являются динамическими системами с полной или частичной компенсацией относительно произвольных возмущений, относят к классу инвариантных. В ряде работ рассматривается принцип инвариантности и вариационный подход к решению задач инвариантности [3; 16; 19–21], а также принцип максимума Понтрягина в теории динамических систем [1; 2; 4; 10–12; 15; 17; 27–32]. Одним из важных инструментов анализа зависимости характеристик компенсации от возмущений являются методы теории чувствительности [3; 16; 18; 19; 22; 25; 32]. Рассмотрение вышеупомянутых задач, включая применение принципа максимума в теории динамических систем, является целью исследования.

О вариационном подходе к инвариантности динамических систем

Одной из проблем экономических систем, как и всех динамических, является оптимальное управление [16; 20; 21], состоящее в минимизации (максимизации) некоторого целевого функционала

$$J(x, v) \to \min, \qquad (1)$$

подчиненного системе дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, v, t),\ x(t_0) = x^0, \qquad (2)$$

где $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ – вектор-функция переменных $x(t) \in G_x \subset R^n$ и $v(t) \in G_v \subset R^r$. При этом $x(t)$ – вектор состояния системы, а $v(t)$ – вектор управляющих и/или возмущающих воздействий.

Вариационные методы решения задач Лагранжа, Майера и Больца, описываемые уравнениями вида (1) и (2), рассматриваются, например, в работе Н. Н. Моисеева [14]. Функция цели может в общем случае зависеть не только от решения системы дифференциальных уравнений $\hat{x}(t)$ в момент $t = t_1$, но и от характера функциональных пространств, которым принадлежат решения и возмущения, $x(t) \in G_x$ и $v(t) \in G_v$.

Иная ситуация присуща инвариантным системам, т. е. системам, дифференциальные уравнения состояния которых имеют решения $\hat{x}(t)$, инвариантные по отношению к внешним воздействиям $v(t)$ из множества G_v. Это означает, что аргументами целевого функционала являются как зависящие от внешних воздействий решения дифференциального уравнения системы, так и само внешнее воздействие $v(t)$:

$$J(t) = \Phi(x(t), v(t), t).$$

На практике чаще всего встречаются функционалы:

1) $J(t) = (x_k(t))$;

2) $J(t) = F(x(t))$;

3) $J(t) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), v(t))dt$.

Первые два функционала можно также представить выражением

$$J(t) = \langle c, x(t)\rangle, \tag{3}$$

где угловые скобки $\langle \cdot, \cdot\rangle$ означают операцию скалярного произведения, а $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ – вектор компонентов функционала (3).

Из инвариантности функционала $J(t)$ относительно вектора воздействий v при заданном решении уравнения системы $\hat{x}(t)$ следует, что вариация функционала

$$\delta_t J(t) = 0. \tag{4}$$

Если условие (4) выполняется только при $t = T$, то инвариантность является слабой, а если при всех $t \in [0, T]$, то абсолютной.

Пусть определена функция

$$H(x, \psi, v, t) = (\psi, f_x),$$

где $\psi(t)$ удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{\psi} = -H'_x$$

с граничными условиями $\psi(T) = -c$. При этом исходное уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x} = H'_\psi.$$

Подстановка решений этих уравнений в формулу, определяющую зависимость величины приращения функционала от вариации входного воздействия, дает выражение, позволяющее заключить о выполнении условий инвариантности:

$$\delta_t J(T) = (c, \delta x(T)) = -\int_{t_0}^{T} [H(x, \psi, v+\delta v, t) - H(x, \psi, v, t)]dt - \eta\,. \tag{5}$$

Здесь η – некоторое остаточное слагаемое.

Если рассмотреть линейную стационарную систему [19]

$$\dot{x} = Ax + bv,$$

то из приведенных выше уравнений следует решение

$$\delta_t J(T) = -\int_0^T (\psi, b)\delta v dt,$$

$$\dot{\psi} = -A^T\psi,\ \psi(T) = -c.$$

Рядом исследователей методами вариационного исчисления получено решение частных проблем инвариантности линейных систем – стационарных и нестационарных, а в некоторых случаях и нелинейных [3; 19]. Названные методы могут применяться в теории оптимального управления [14; 32], а принцип инвариантности применим ко многим многосвязным и многоконтурным системам из области практической деятельности человека, в том числе к экономическим.

Принцип максимума в теории динамических систем

Другой, получивший широкое распространение подход к рассмотрению динамики экономических систем основывается на принципе максимума Понтрягина [17], что следует из анализа ряда публикаций [1; 4; 10–12; 15; 17; 26–31]. Задача Понтрягина заключается в минимизации функционала

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt \to \min_{u\in U}, \tag{6}$$

подчиненного уравнению

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(t_0) = x^0.$$

Здесь $u(t) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$ трактуется как управление, а $f(t) = (f_0, f_1, \ldots, f_n)^T$ – как вектор-функция. $x(t) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^T$ – состояние системы.

Функция Гамильтона задачи определяется как

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u)\rangle.$$

Дифференцирование по компонентам ψ_i и соответственно x_i дает уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial \psi_i}, \tag{7}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x_i}, \tag{8}$$

где $\psi(t) = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)^T$, $i = 0, 1, 2 \ldots, n$, а степень уравнений (7) и (8) равна $2n$.

По выбранному кусочно-линейному управлению u и начальным условиям $x(t_0)$ при решении уравнения (6) можно найти вектор состояния как функцию сопряженного вектора ψ, в свою очередь определяемого из уравнения (8). Далее находится управление $u^*(t)$, решающее задачу максимизации:

$$M(\psi^*, x^*) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u).$$

При этом поскольку всегда можно предположить, что $M(\psi^*, x^*) = 0$, необходимое условие минимума функционала (6), имеющего место в точке $u^*(t)$, дается неравенством $\psi_0 < 0$. Более полные сведения по решению задачи содержатся, например, в работе Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко «Математическая теория оптимальных процессов» [17].

Конечно, это только математическая часть задачи моделирования, начинающейся, в частности, с обоснования структуры модели и функционала цели. Решение этой части экономических задач часто основывается на принципах физической аналогии, особенно на законах сохранения. Не являясь целью исследования, эта, несомненно, важная часть опускается, а обсуждаются лишь известные по ряду публикаций результаты – уравнения и функционалы, конкретизирующие постановку задач оптимизации в нормированной форме.

Так, например, одну из возможных моделей оптимального инвестирования в производственные фонды предприятия можно представить следующей задачей [1; 2]:

$$\dot{x}(t) = u(t) - \alpha x(t),\ u(t) \in U = \{u \in R : 0 \le u \le u_{\max}\},\ x(0) = x_0.$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\alpha x(t) - bx^2(t) - cu(t)\right]dt \to \max,$$

где $x(t)$ – динамика капитала предприятия в единицу времени;

$u(t)$ – количество приобретаемых единиц оборудования;

α – удельная скорость износа оборудования;

ρ, b, c – неотрицательные коэффициенты.

Это задача на бесконечном интервале. В принципе, пределы интегрирования могут быть представлены и конечными числами. Коэффициент ρ называется также параметром дисконтирования.

Другой пример – модель экономического роста на бесконечном интервале, которую можно представить следующими уравнениями [2; 10; 11]:

$$\dot{x}(t) = u(t) f(x(t)) - \mu x(t),$$

$$u(t) \in U_\varepsilon = [0, 1 - \varepsilon],\ x(0) = x_0,$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))\right]dt \to \max.$$

За всеми подобными моделями скрываются часто неопределенные факторы и законы реальной экономики, характеризующие технологическое оснащение производства, производительность и интенсивность труда, подготовленность трудового ресурса, личностную историю становления производства и т. п. В этом плане представленные выше модели дают лишь интегральную характеристику производства, не позволяя сделать прогноз на сколь-нибудь значимый интервал времени. Конечно, модель управления односекторной экономикой, учитывающая потребление производителей [4], не решает названную проблему в целом.

Действующими факторами здесь являются произведенный продукт, являющийся суммой инвестиций, потреблений работодателей и потреблений наемных работников, капитал и трудовые ресурсы. Модель оптимального управления при этом задается следующими уравнениями [4]:

$$\dot{x}(t) = \left[f_x'(x(t)) - v\right]x(t) - s_K(t)f(x(t)),$$

$$0 \le s_K(t) \le 1,\ x(0) = x_0,\ x(T) \ge xT > 0,$$

$$J(x, u) = \int_0^T e^{-\rho t} s_K(t) f(x(t)) dt \to \max_{s_K},$$

где $x(t)$ – нормированные к трудовым ресурсам основные фонды;

$s_K(t)$ – норма потребления производителей.

Существует множество иных моделей, к числу которых относятся, например, модели рыночной конкуренции – модель олигополии Курно и синергетическая модель устойчивости средней фирмы [12], подобная модели финансовых циклов [13]. Динамика модели средней фирмы, представленная в координатах «число сотрудников, величина капитала, размер кредита» (y_1, y_2, y_3), описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}_1 = ay_2y_3 - by_1,$$

$$\dot{y}_2 = c(y_2 + y_3) - dy_1y_3,$$

$$\dot{y}_3 = ey_2 - fy_3.$$

В зависимости от значений параметров в этой модели может наблюдаться как циклическая, так и хаотическая динамика. Многие особенности построения математических моделей экономики раскрываются в статье Ю. И. Параева и К. О. Полуэктовой [15], а также в работах зарубежных исследователей [26–31]. Так, Б. Д. Крейвен описывает два подхода к решению задач оптимального управления с бесконечным интервалом [27]. Помимо принятого [1; 2] метода взвешивания, в статье используется преобразование переменной t – отображение $[0, \infty) \to [0, 1)$.

Присущая всем экономическим системам проблема неопределенности, обусловленная действием, часто значительным, экзогенных и эндогенных факторов, требует некоторой коррекции задачи оптимизации, а именно пополнения параметров модели системы параметрами, отвечающими за действие указанных факторов. Вновь введенные таким образом параметры можно представить вектором

$$v \in V \subset R^l,$$

где V – множество возможных значений вектора v.

Функции Гамильтона можно придать вид $H(\psi, x, u, v) = \langle\psi, f(x, u, v)\rangle$. При этом оптимальное решение, отвечающее вектору $v^k \in V$, имеет вид $u^*(t, v^k)$, $x^*(t, v^k)$, $J^*(v^k)$.

Динамике экономических систем, методам управления экономикой и принимаемым решениям присущ во многом кусочно-непрерывный характер, что хорошо согласуется с условиями, налагаемыми на функции задач оптимизации методами, в основе которых лежит принцип максимума Понтрягина. В этом плане представляют значительный интерес методы теории систем с переменной структурой, нашедшей выражение в методах асимптотической теории управления неопределенными объектами [5–7] и теории скользящих режимов [5]. Эти методы представляют интерес и в плане их приложения к моделированию экономических объектов. Представляют интерес также и результаты работ по инвариантности, стабилизации и управлению объектами из других областей науки и техники [8; 9; 23; 24].

О чувствительности динамических систем

Чувствительность, как известно, означает зависимость некоторых характеристик динамической (экономической) системы от изменяющихся в окрестности номинальных значений, параметров. Многообразие методов теории систем [18] привело к появлению и разных характеристик чувствительности, характеристик временных и частотных, логарифмических и полулогарифмических, непрерывных и разрывных, параметрических и др. Чувствительность моделей, при анализе которых используется принцип максимума Понтрягина, можно определить из выражения, определяющего диаметр множества значений целевого функционала $\operatorname{Diam}\left\{J^*(v \in \widetilde{V} \subset V)\right\}$ либо диаметр множества решений $x^*(v)$ или $u^*(v)$.

Функциональными характеристиками чувствительности являются дифференциалы и соответствующие им производные Гато и Фреше. Приложения теории чувствительности к теории автоматического управления рассматриваются в ряде работ [16; 25].

Дифференциал Гато отображения $f: X \to Y$ в точке $\hat{x}$ задается выражением

$$Df(\hat{x}, h) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda}.$$

Если при этом дифференциал Гато линеен по h, т. е. $DF(\hat{x}, h) = Ah$, так, что

$$\lim_{\lambda \to 0} (1/\lambda) \left\| f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) - \lambda A h \right\| = 0,$$

то оператор $A = f'_x(\hat{x})$ называется производной Гато.

Пусть отображение $f: Q \subset R^m \to R^n$, тогда производная Гато дается матрицей Якоби

$$f'_x = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_m f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_n & \cdots & \partial_m f_n \end{pmatrix}, \ \partial_j f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

В ряде случаев проще при анализе чувствительности воспользоваться дифференцированием по Фреше. Отображение $f: Q \subset R^m \to R^n$ считается при этом дифференцируемым по Фреше, если существует линейный оператор A такой, что

$$\lim_{h \to 0} \left(1/\|h\|\right) \left\| f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) - Ah \right\| = 0.$$

Оператор A при этом – это производная Фреше отображения f, т. е. $A = f'_x(\hat{x})$, из существования которой следует и существование производной Гато, но не обязательно обратно. В подобной ситуации, когда производные Гато и Фреше фактически совпадают, можно использовать для них единое обозначение, что, как правило, и делается. Как пример теории далее можно рассмотреть задачу идентификации динамической системы [16].

Цель рассматриваемой задачи идентификации состоит в оценке вектора неизвестных параметров $\alpha \in R^r$ системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha), \ x^* = x(t_0) \tag{9}$$

и линейным алгебраическим уравнением – уравнением выхода системы

$$z(\tau) = H(\tau)x(\tau), \tag{10}$$

где $f(\cdot, \ \cdot, \ \cdot)$ – вектор-функция состояния $x(t) \in G_x \subset R^m$;

x^* – начальные условия;

$z(\tau)$ – наблюдаемые данные;

$H(\tau)$ – матрица коэффициентов размера $m \cdot n$.

Решению уравнения (9) при известном векторе $\alpha = \alpha^* + \delta\alpha$ можно также придать вид

$$x(\tau, \alpha) \cong x(\tau, \alpha^*) + x'_\alpha(\tau, \alpha^*)\delta\alpha, \tag{11}$$

где $x(\tau, \alpha^*)$ – решение уравнения (9) при значении $\alpha = \alpha^*$.

Подстановка выражения (11) в (9) дает матричное уравнение

$$\dot{x}'_\alpha(\tau, \alpha^*) \cong f'_x(\tau, x(\tau, \alpha^*), \alpha^*)x'_\alpha(\tau, \alpha^*) + f'_\alpha(\tau, x(\tau, \alpha^*), \alpha^*), \ \ x'_\alpha(t_0, \alpha^*) = 0. \tag{12}$$

Поскольку выход системы определяется согласно (10) и (11) выражением

$$\hat{z}(\tau) = H(\tau)x(\tau, \alpha^*) + H(\tau)x'_\alpha(\tau, \alpha^*)\,\delta\alpha,$$

то требуется, чтобы искомый вектор параметров α^* удовлетворял условиям наилучшего приближения. Более полные сведения по решению этой задачи можно найти в работах Б. Н. Петрова [16].

Особый класс процессов образуют экономические и деловые циклы, представляемые периодическими, но нерегулярными колебаниями, происходящими в окрестности соответствующих долгосрочных трендов развития экономики.

Обсуждение и заключение

В ходе анализа закономерностей и особенностей ценообразования цифровых валют в перспективе возможно построение математических моделей, приближенных к реальным рынкам криптовалют и ЦФА. Для построения таких математических моделей предлагается применение принципа максимума, методов анализа чувствительности, а также вариационного подхода к инвариантности динамических систем.

Построение математических моделей экономических систем с применением современного IT-инструментария позволяет более эффективно подойти к вопросу управления цифровыми финансовыми активами и цифровыми валютами с учетом специфических особенностей и закономерностей ценообразования криптоактивов, находящихся под воздействием внутренних и внешних ограничений и рисков.

Результаты исследований могут быть применены в корпоративном секторе и для создания гибридного суверенного фонда. Внедрение систем управления криптовалютами и ЦФА может повысить устойчивость государства и Центрального банка к геополитическим и валютным рискам.

Список литературы

1. *Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В.* Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи математических наук. – 2012. – Т. 67. – Вып. 2. – С. 3–64.

2. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. – 2007. – Т. 257. – С. 3–271.

3. *Величенко В. В.* О вариационном методе в проблеме инвариантности управляемых систем // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 4. – С. 22–35.

4. *Дёмин Н. С., Кулешова Е. В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 9. – С. 140–155.

5. *Емельянов С. В., Коровин С. К.* Скользящие режимы высших порядков в системах автоматического управления // Сборник трудов ИСА РАН. – 1993. – Вып. 2. – С. 39–70.

6. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Мамедов И. Г., Носов А. Н.* Асимптотическая инвариантность в задачах управления неопределенными объектами // Доклады АН СССР. – 1990. – Т. 301. – № 1. – С. 44–49.

7. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Мамедов И. Г., Носов А. Н.* Асимптотическая инвариантность систем управления с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 415–427.

8. *Кочетков С. А., Уткин В. А.* Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 7. – С. 46–83.

9. *Краснова С. А., Уткин В. А., Уткин А. В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 12. – С. 26–53.

10. *Красовский А. А., Тарасьев А. М.* Построение нелинейных регуляторов в моделях экономического роста // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15. – № 13. – С. 127–138.

11. *Красовский А. А., Тарасьев А. М.* Свойства гамильтоновых систем и принципа максимума Понтрягина для задач экономического роста // Труды МИАН. – 2008. – Т. 262. – С. 127–145.

12. *Майоров Е. В., Алексеева Т.* Анализ моделей нелинейной динамики экономических процессов средствами системы MATLAB // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2014. – № 2 (192). – С. 200–205.

13. *Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29. – № 4. – С. 127–138.

14. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. – М. : ЛЕНАНД, 2020.

15. *Параев Ю. И., Полуэктова К. О.* Оптимальное управление односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 4. – С. 162–172.

16. *Петров Б. Н.* Избранные труды. – Т. 1. Теория автоматического управления. – М. : Наука, 1983.

17. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М. : Наука, 1983.

18. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления. – М. : Наука, 1981.

19. *Розоноэр Л. И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления. I, II // Автоматика и телемеханика. – 1963. – I – № 6. – С. 744–756; II – № 7. – С. 861–670.

20. Современные методы проектирования систем автоматического управления. Анализ и синтез / под общ. ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Ю. И. Топчеева. – М. : Машиностроение, 1967.

21. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. – Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования / под ред. В. В. Солодовникова. – М. : Машиностроение, 1967.

22. *Томович Р., Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. – М. : Советское радио, 1972.

23. *Уткин А. В., Уткин В. А.* Синтез систем стабилизации при односторонних ограничениях на управляющие воздействия // Проблемы управления. – 2020. – № 3. – С. 3–13.

24. *Уткин В. И., Орлов Ю. В.* Системы управления с векторными реле // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 9. – С. 143–155.

25. Чувствительность автоматических систем : труды Международного симпозиума по чувствительным системам автоматического управления (Дубровник, сентябрь 1964) / отв. ред. Я. З. Цыпкина. – М. : Наука, 1968.

26. *Blot J., Chebbi H.* Discrete Time Pontryagin Principles with Infinite Horizon // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2000. – N 246. – P. 265–279.

27. *Craven B. D.* Optimal Control on an Infinite Domain // ANZIAMJ. – 2005. – N 47. – P. 143–153.

28. *Maliar L., Maliar S., Winant P.* Deep Learning for Solving Dynamic Economic Models // Journal of Monetary Economics. – 2021. – N 122. – P. 76–101.

29. *Pereira F. L., da Silva G. N.* Necessary Conditions of Optimality for Constrained Infinite Horizon Differential Inclusions // 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). – Leon, Spain, 2011.

30. *Perevoznikov E., Lomteva E.* Modeling of Economic Processes, Instability and Chaos // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2019. – N 7. – P. 356–363.

31. *Seierstad A. A.* Maximum Principle for Smooth Infinite Horizon Optimal Control Problems with State Constraints and with Terminal Constraints at Infinity // Open Journal of Optimization. – 2015. – N 4. – P. 100–130.

32. Special Issue on Sensitivity // Journal of the Franklin Institute. – 1981. – Vol. 312. – N 3-4. – P. 141–216.

References

1. Aseev S. M., Besov K. O., Kryazhimskiy A. V. Zadachi optimalnogo upravleniya na beskonechnom intervale vremeni v ekonomike [The Problems of Optimal Control on the Infinite Time Interval in Economics]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 2012, Vol. 67, Issue 2, pp. 3–64. (In Russ.).

2. Aseev S. M., Kryazhimskiy A. V. Printsip maksimuma Pontryagina i zadachi optimalnogo ekonomicheskogo rosta [Pontryagin's Maximum Principle and the Problem of Optimal Economic Growth]. *Trudy MIAN* [Proceedings of MIAN], 2007, Vol. 257, pp. 3–271. (In Russ.).

3. Velichenko V. V. O variatsionnom metode v probleme invariantnosti upravlyaemykh sistem [On the Variational Method in the Problem of Invariance of Controllable Systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 1972, No. 4, pp. 22–35. (In Russ.).

4. Demin N. S., Kuleshova E. V. Upravlenie odnosektornoy ekonomikoy na konechnom intervale vremeni s uchetom potrebleniya rabotodateley [Management of Single-Sector Economy on a Finite Time Interval Taking into Account Employers' Consumption]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2008, No. 9, pp. 140–155. (In Russ.).

5. Emelyanov S. V., Korovin S. K. Skolzyashchie rezhimy vysshikh poryadkov v sistemakh avtomaticheskogo upravleniya [Sliding Modes of Higher Orders in Automatic Control Systems]. *Sbornik trudov ISA RAN* [ISA RAS Proceedings], 1993, Issue 2, pp. 39–70. (In Russ.).

6. Emelyanov S. V., Korovin S. K., Mamedov I. G., Nosov A. N. Asimptoticheskaya invariantnost v zadachakh upravleniya neopredelennymi obektami [Asymptotic Invariance in Problems of Control of Uncertain Objects]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1990, Vol. 301, No. 1, pp. 44–49. (In Russ.).

7. Emelyanov S. V., Korovin S. K., Mamedov I. G., Nosov A. N. Asimptoticheskaya invariantnost sistem upravleniya s zapazdyvaniem [Asymptotic Invariance of Control Systems with Lagging]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1991, Vol. 27, No. 3, pp. 415–427. (In Russ.).

8. Kochetkov S. A., Utkin V. A. Invariantnost v sistemakh s nesoglasovannymi vozmushcheniyami [Invariance in Systems with Incoherent Perturbations]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2013, No. 7, pp. 46–83. (In Russ.).

9. Krasnova S. A., Utkin V. A., Utkin A. V. Blochnyy podkhod k analizu i sintezu invariantnykh nelineynykh sistem slezheniya [Block Approach to the Analysis and Synthesis of Invariant Nonlinear Tracking Systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2017, No. 12, pp. 26–53. (In Russ.).

10. Krasovskiy A. A., Tarasev A. M. Postroenie nelineynykh regulyatorov v modelyakh ekonomicheskogo rosta [Construction of Nonlinear Regulators in Models of Economic Growth.]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS], 2009, Vol. 15, No. 13, pp. 127–138. (In Russ.).

11. Krasovskiy A. A., Tarasev A. M. Svoystva gamiltonovykh sistem i printsipa maksimuma Pontryagina dlya zadach ekonomicheskogo rosta [Properties of Hamiltonian Systems and Pontryagin's Maximum Principle for Problems of Economic Growth]. *Trudy MIAN* [Proceedings of MIAN], 2008, Vol. 262, pp. 127–145. (In Russ.).

12. Mayorov E. V., Alekseeva T. Analiz modeley nelineynoy dinamiki ekonomicheskikh protsessov sredstvami sistemy MATLAB [Analysis of Nonlinear Dynamics Models of Economic Processes by Means of MATLAB System]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU.*

Ekonomicheskie nauki [Scientific and Technical Bulletin of Saint Petersburg State Pedagogical University. Economic Sciences], 2014, No. 2 (192), pp. 200–205. (In Russ.).

13. Matrosov V. V., Shalfeev V. D. Modelirovanie ekonomicheskikh i finansovykh tsiklov: generatsiya i sinkhronizatsiya [Modeling Economic and Financial Cycles: Generation and Synchronization]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [News of Higher Educational Institutions. Applied Nonlinear Dynamics], 2021, Vol. 29, No. 4, pp. 127–138. (In Russ.).

14. Moiseev N. N. Chislennye metody v teorii optimalnykh system [Numerical Methods in the Theory of Optimal Systems]. Moscow, LENAND, 2020. (In Russ.).

15. Paraev Yu. I., Poluektova K. O. Optimalnoe upravlenie odnosektornoy ekonomikoy pri sluchaynom izmenenii osnovnogo kapitala i trudovykh resursov [Optimal Management of Single-Sector Economy with Random Changes in Fixed Capital and Labor Resources]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2020, No. 4, pp. 162–172. (In Russ.).

16. Petrov B. N. Izbrannye trudy. T. 1. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Selected works. Vol. 1. Theory of Automatic Control]. Moscow, Nauka, 1983. (In Russ.).

17. Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka, 1983. (In Russ.).

18. Rozenvasser E. N., Yusupov R. M. Chuvstvitelnost sistem upravleniya [Sensitivity of Control Systems]. Moscow, Nauka, 1981. (In Russ.).

19. Rozonoer L. I. Variatsionnyy podkhod k probleme invariantnosti sistem avtomaticheskogo upravleniya. I, II [A Variational Approach to the Problem of Invariance of Automatic Control Systems. I, II]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 1963, I, No. 6, pp. 744–756; II, No. 7, pp. 861–670. (In Russ.).

20. Sovremennye metody proektirovaniya sistem avtomaticheskogo upravleniya. Analiz i sintez [Modern Methods of Designing Automatic Control Systems. Analysis and Synthesis], edited by B. N. Petrov, V. V. Solodovnikov, Yu. I. Topcheev. Moscow, Mashinostroenie, 1967. (In Russ.).

21. Tekhnicheskaya kibernetika. Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya. Kn. 2. Analiz i sintez lineynykh nepreryvnykh i diskretnykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Technical Cybernetics. Theory of Automatic Regulation. Book 2. Analysis and Synthesis of Linear Continuous and Discrete Automatic Control Systems], edited by V. V. Solodovnikov. Moscow, Mashinostroenie, 1967. (In Russ.).

22. Tomovich R., Vukobratovich M. Obshchaya teoriya chuvstvitelnosti [General Theory of Sensitivity]. Moscow, Soviet Radio, 1972. (In Russ.).

23. Utkin A. V., Utkin V. A. Sintez sistem stabilizatsii pri odnostoronnikh ogranicheniyakh na upravlyayushchie vozdeystviya [Synthesis of Stabilization Systems under One-Sided Restrictions on Control Actions]. *Problemy upravleniya* [Problems of Control], 2020, No. 3, pp. 3–13. (In Russ.).

24. Utkin V. I., Orlov Yu. V. Sistemy upravleniya s vektornymi rele [Control Systems with Vector Relays]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Telemechanics], 2019, No. 9, pp. 143–155. (In Russ.).

25. Chuvstvitelnost avtomaticheskikh sistem: trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma po chuvstvitelnym sistemam avtomaticheskogo upravleniya (Dubrovnik, sentyabr 1964) [Sensitivity of Automatic Systems. Proceedings of the International Symposium on Sensitive Automatic Control Systems (Dubrovnik, September 1964)], edited by Ya. Z. Tsypkin. Moscow, Nauka, 1968. (In Russ.).

26. Blot J., Chebbi H. Discrete Time Pontryagin Principles with Infinite Horizon. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, No. 246, pp. 265–279.

27. Craven B. D. Optimal Control on an Infinite Domain. *ANZIAMJ*, 2005, No. 47, pp. 143–153.

28. Maliar L., Maliar S., Winant P. Deep Learning for Solving Dynamic Economic Models. *Journal of Monetary Economics*, 2021, No. 122, pp. 76–101.

29. Pereira F. L., da Silva G. N. Necessary Conditions of Optimality for Constrained Infinite Horizon Differential Inclusions. *5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011)*. Leon, Spain, 2011.

30. Perevoznikov E., Lomteva E. Modeling of Economic Processes, Instability and Chaos. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2019, No. 7, pp. 356–363.

31. Seierstad A. A. Maximum Principle for Smooth Infinite Horizon Optimal Control Problems with State Constraints and with Terminal Constraints at Infinity. *Open Journal of Optimization*, 2015, No. 4, pp. 100–130.

32. Special Issue on Sensitivity. *Journal of the Franklin Institute*, 1981, Vol. 312, No. 3-4, pp. 141–216.

Сведения об авторе

Александр Юрьевич Проскуряков
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры электроники
и вычислительной техники МИВлГУ.
Адрес: Муромский институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный
университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых»,
602264, Владимирская область,
Муром, ул. Орловская, д. 23.
E-mail: alexander.prosk.murom@gmail.com

Information about the author

Alexander Yu. Proskuryakov
PhD, Associate Professor,
Associate Professor of the Department
for Electronics and Computer Engineering
of the Murom Institute (branch)
of the Vladimir State University.
Address: Murom Institute (branch)
of the Vladimir State University,
23 Orlovskaya Str., Murom, Vladimir region,
602264, Russian Federation.
E-mail: alexander.prosk.murom@gmail.com