

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ФИНАНСОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМ ДОХОДОМ

Попова Наталья Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова.

Адрес: ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова», 117997, Москва, Стремянный пер., д. 36.

E-mail: nat_popova@mail.ru

В статье приводится краткая история развития теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности. Основное внимание уделяется математическим методам и их роли в развитии теории. Отмечается расширение математического аппарата, применяемого в исследованиях, по мере развития теории. С этих позиций анализируются некоторые работы автора данной статьи. Обосновываются следующие выводы: применение математических методов играет решающую роль в формировании и развитии теории, позволяет систематизировать рыночные наблюдения, иногда их объяснять, а также получать дополнительную информацию об инвестиционных свойствах облигации.

Ключевые слова: математические методы, условия определенности, облигация.

THE ROLE OF MATHEMATICAL METHODS IN THE THEORY OF FINANCIAL INVESTMENTS IN FIXED INCOME

Popova, Natalia V.

PhD, Assistant Professor, Professor of the Department for Higher Mathematics of the PRUE.

Address: Plekhanov Russian University of Economics, 36 Stremyanny Lane, Moscow, 117997, Russian Federation.

E-mail: nat_popova@mail.ru

The article gives the short history of the theory of finance investment with fixed profits in conditions of uncertainty. Special attention is paid to mathematic methods and their role in theory development. The author shows the extension of the mathematic apparatus used in the research as the theory goes on developing. From these points of view some works by the article's author are analyzed. The following conclusions are grounded: the use of mathematic methods plays an important role in shaping and developing the theory, provides an opportunity to systematize market observations, sometimes to explain them and to obtain additional information about investment characteristics of bond.

Keywords: mathematic methods, conditions of uncertainty, bond.

Теория финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности является основой современной теории финансовых инвестиций. Главный объект изучения этой теории – безрисковые ценные бумаги (облигации). Основные требования условий определенности: облигация справедливо оценена, не имеет кредитного риска и не может быть отозвана эмитентом до установленной даты погашения. Этим требованиям наиболее полно соответствуют российские государственные облигации, например, ОФЗ¹ или казначейские облигации на американском рынке облигаций [1]. В связи с особой ролью таких бумаг на фондовом рынке развитие теории представляет и практический интерес. Возникновение и развитие этой теории тесно связано с развитием рынка ценных бумаг. Довольно длительное время именно государство выступало в роли эмитента облигаций для финансирования своих расходов, связанных прежде всего с войнами.

Быстрое развитие рынка ценных бумаг в XX в. породило необходимость теоретических методов анализа инвестиций, главным образом в государственные ценные бумаги. Математика предоставила инструментарий, подходящий для этих целей.

В 30–40-х гг. XX в. началось формирование современной теории управления портфелем государственных облигаций. Американским экономистом Ф. Маколеем было предложено использовать понятие дюрации для обозначения средневзвешенного срока всех платежей по облигации [12. – Р. 48]. Несмотря на ограниченность условий, при которых определен этот показатель, в настоящее время он востребован и в усовершенствованном виде используется в различных исследованиях [12]. В 40–50-х гг. XX в. в работах лауреата Нобелевской премии по экономике П. Самуэльсона [16] и английского актуария Ф. Реддингтона [15]

было введено понятие иммунизации, установлено иммунизирующее свойство дюрации и сформулирован принцип иммунизации портфеля облигаций. Для описания классической теории иммунизации, создаваемой этими и другими учеными, использовался аппарат теории глобальных экстремумов функций и дифференциального исчисления.

В 1973 г. Хопвелл и Кауфман [11], используя понятие производной, установили еще одно свойство дюрации Маколея – как меры процентного риска облигации (портфеля облигаций), а разложение функций в степенные ряды позволило в 1984 г. Диллеру и Датгатриа [9] ввести еще одну характеристику облигации – показатель выпуклости, и указать ее роль в оценке процентного риска облигации. В настоящее время дюрация и показатель выпуклости воспринимаются как неотъемлемые инвестиционные характеристики облигации (портфеля облигаций). Подчеркнем, что появлению показателя выпуклости способствовало применение математических методов в анализе инвестиций. В работе Габриэля Хававини [10] доказаны все основные свойства дюрации Маколея. Для доказательства были использованы методы дифференциального исчисления.

Применение математических методов к изучению облигации оказалось очень эффективным. В работе Малкиела [13] получили математическое доказательство теоремы об оценке облигаций (ныне известны, как рыночные) [8. – С. 456–458]. Для доказательства был использован аппарат дифференциального исчисления. Эти теоремы составляют основу теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности и изначально были сформулированы как результат рыночных наблюдений. К настоящему времени в этой теории рассмотрены основные инвестиционные свойства облигации.

В. Е. Барбаумов, И. М. Гладких и А. С. Чуйко приводят математические доказательства влияния основных факторов (доходности, купонной ставки и срока до

¹ См.: Восторг от ОФЗ: инвесторы устроили ралли на рынке облигаций. – URL: <http://money.rbc.ru/news/56d82e3d9a79479f2bb4fece> (дата обращения: 10.06.2016).

погашения) на инвестиционные свойства облигации, а также портфеля облигаций¹. Математические доказательства некоторых свойств облигации позволили объяснить, с чем эти свойства связаны. Например, из доказательств теорем в [6] и [13] следует, что наблюдаемые на рынке свойства цены облигации, такие как большая чувствительность цены к снижению доходности к погашению, нежели чем к ее увеличению, или чем выше уровень доходности, тем ниже изменчивость цены [7. – С. 507], объясняются выпуклостью зависимости «цена – доходность».

Развитие теории потребовало исследований и новых доказательств. Некоторые из них получены автором [2–5] при тех же условиях, что и в работе Малкиела [13]. Это условия определенности. В связи с этим предложенные доказательства можно рассматривать как дополнение теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности.

Применение математических методов в работах [2] и [5] позволило уточнить поведение процентного риска долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом. Из работ следует наличие особенности в зависимости процентного риска таких облигаций от срока до погашения (существование максимума). Эта особенность, конечно, была замечена рынком. Например, авторы интернет-ресурса отмечают: «Увеличение времени обращения облигации не всегда автоматически означает и рост ее дюрации»². В [5] получено приближенное значение срока максимума дюрации. Результаты этой работы согласуются с работой Хававини [10], а также с работой Паоло Пианка [14]. В отличие от указанных работ, где результаты получены с помощью методов дифференциального исчисления, доказательство в [5] получено на основа-

нии свойств числовых последовательностей и применения метода математической индукции. Подчеркнем, что эта особенность поведения дюрации проявляется в области больших сроков до погашения, т. е. является свойством долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом. Этот вывод согласуется с работой [2], посвященной влиянию срока до погашения на процентный риск облигации.

Для получения доказательства теоремы в работе [2] потребовалось предварительно доказать теорему о влиянии уровня доходности рынка на величину изменения цены купонной облигации при изменении срока до ее погашения на один купонный период. Эта теорема является естественным продолжением одной из рыночных теорем. Однако ранее такая зависимость не изучалась. Для доказательства теоремы были использованы достаточные условия монотонности и глобального экстремума дифференцируемой функции. Установлено, что для облигаций, продающихся по номиналу и с премией, абсолютное и относительное изменения цены являются убывающими функциями доходности, а для облигаций, продающихся с дисконтом, существуют значения доходности, когда достигаются максимумы абсолютного и относительного изменения цены. Решение этой вспомогательной задачи само по себе представляет интерес и дополняет теорию инвестирования. Доказанная теорема является примером того, что применение математических методов позволяет установить такие инвестиционные свойства облигации, которые в условиях реального рынка могут явно не проявляться, однако оказывают влияние на наблюдаемые инвестиционные свойства.

В работах [3] и [4] рассмотрены задачи о влиянии частоты купонных платежей на цену облигации и ее показатель дюрации. Доказательства получены с помощью разложений функций в степенные ряды, теорем о дифференцируемых функциях и теорем выпуклого анализа. Были использованы свойства знакопеременяющихся ря-

¹ См.: Барбаумов В. Е., Гладких И. М., Чуйко А. С. Финансовые инвестиции с фиксированным доходом (количественный анализ) : учебное пособие. – М. : Изд-во РЭУ им. Г. В. Плеханова, 2006.

² URL: <http://data.cbonds.info/files/cbondscalc/HelpCalculator.pdf> (дата обращения: 25.10.2015).

дов и сходящихся числовых последовательностей. Ранее такие задачи не рассматривались. Следует отметить, что к результатам работы [3] можно отнести и расширение математического аппарата, применяемого в финансовом анализе в условиях определенности. Такие операции, как разложение сложных функций в степенные ряды, перемножение рядов, ранее не применялись в решении задач теории финансовых инвестиций в условиях определенности.

Таким образом, кратко рассмотренная история развития теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности позволяет сформулировать роль математических методов в развитии этой теории. Эта роль – формирующая. Известно, что примеры и эксперименты для математики не имеют доказательной силы. Лишь после того, как получено математическое доказательство, утверждение приобретает «абсолютный и вечный» характер, как всякая математическая истина. Именно математические ме-

тоды позволяют систематизировать рыночные наблюдения и конкретные вычисления и на этой основе предсказывать поведение финансового инструмента.

По мере развития теории усложняется и применяемый в исследованиях математический аппарат. В настоящее время активно развивается теория инвестирования в условиях неопределенности, требующая применения вероятностных методов. Однако несмотря на ограниченность теории инвестирования в условиях определенности, она остается основой для всей теории финансовых инвестиций.

Применение математических методов способствует развитию этой теории и одновременно углублению знаний об инвестиционных свойствах облигации. В результате увеличивается способность данной теории выполнять основную свою функцию – возможность понимать, объяснять и прогнозировать поведение облигации как объекта инвестирования.

Список литературы

1. Мельникова Л. Ф., Прошкина С. Д. Безрисковые инвестиции российского рынка ценных бумаг // Успехи современного естествознания. – 2012. – № 4. – С. 80–81.
2. Попова Н. В. Влияние срока до погашения на изменчивость цены облигации // Вестник Финансового университета. – 2013. – № 3 (75). – С. 72–84.
3. Попова Н. В. Влияние частоты купонных платежей на показатель дюрации облигации // Вестник Финансового университета. – 2015. – № 4 (88). – С. 104–115.
4. Попова Н. В. Влияние частоты купонных платежей на цену облигации // Вестник Финансового университета. – 2012. – № 3 (69). – С. 40–44.
5. Попова Н. В. О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник Финансового университета. – 2011. – № 1 (61). – С. 42–46.
6. Попова Н. В. Рыночные теоремы и их продолжение // Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. – 2013. – № 7 (61). – С. 93–101.
7. Фабоцци Ф. Дж. Управление инвестициями : пер. с англ. – М. : Инфра-М, 2000.
8. Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – М. : Инфра-М, 1999.
9. Diller S., Dattatreya R. Parametric Analysis of Fixed Income Securities. – New York : Goldman Sachs, 1984.
10. Hawawini G. A. On the Mathematics of Macaulay's Duration: a Note. – URL: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf
11. Hopewell M., Kaufman G. Bond Price Volatility and Term to Maturity: a Generalized Respecification // American Economic Review. – 1973. – Vol. 63. – N 4. – P. 749–753.

12. Macaulay F. Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856. – New York : NBER, 1938.
13. Malkiel B. Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates // Quarterly Journal of Economics. – 1962. – Vol. 76 (2). – P. 197–218.
14. Pianca P. Maximum Duration of Below Par Bonds: A Closed-form Formula. – URL: <http://ssrn.com/abstract=738445>
15. Redington F. M. Review of the Principles of Life-Office Valuations // Journal of the Institute of Actuaries. – 1952. – Vol. 78. – N 3. – P. 286–315.
16. Samuelson P. The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System // American Economic Review. – 1945. – Vol. 55. – N 1. – P. 16–27.

References

1. Mel'nikova L. F., Prokshina S. D. Bezriskovye investitsii rossiyskogo rynka tsennykh bumag [Non-Risky Investment of the Russian Securities Market]. *Progress of Modern Natural Science*, 2012, No. 4, pp. 80–81. (In Russ.).
2. Popova N. V. Vliyanie sroka do pogasheniya na izmenchivost' tseny obligatsii [The Impact of Period of Time before Redemption on the Bond Price]. *Bulletin of the Finance University*, 2013, No. 3 (75), pp. 72–84. (In Russ.).
3. Popova N. V. Vliyanie chastoty kuponnykh platezhey na pokazatel' dyuratsii obligatsii [The Impact of Frequency of Coupon Payments on the Bond Duration]. *Bulletin of the Finance University*, 2015, No. 4 (88), pp. 104–115. (In Russ.).
4. Popova N. V. Vliyanie chastoty kuponnykh platezhey na tsenu obligatsii [The Impact of Frequency of Coupon Payments on the Bond Price]. *Bulletin of the Finance University*, 2012, No. 3 (69), pp. 40–44. (In Russ.).
5. Popova N. V. O nekotorykh svoystvakh dyuratsii Makoleya [About Certain Properties of Macoley's Duration]. *Bulletin of the Finance University*, 2011, No. 1 (61), pp. 42–46. (In Russ.).
6. Popova N. V. Rynochnye teoremy i ikh prodolzhenie [Market Theorems and their Prolongation]. *Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics*, 2013, No. 7 (61), pp. 93–101. (In Russ.).
7. Fabocci F. G. Upravlenie investitsiyami [Investment Management], translated from English. Moscow, Infra-M, 2000. (In Russ.).
8. Sharp U. F., Aleksander G. Dzh., Beyli Dzh. V. Investitsii [Investment]. Moscow, Infra-M, 1999. (In Russ.).
9. Diller S., Dattatreya R. Parametric Analysis of Fixed Income Securities. New York, Goldman Sachs, 1984.
10. Hawawini G. A. On the Mathematics of Macaulay's Duration: a Note. Available at: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf
11. Hopewell M., Kaufman G. Bond Price Volatility and Term to Maturity: a Generalized Respecification. *American Economic Review*, 1973, Vol. 63, No. 4, pp. 749–753.
12. Macaulay F. Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856. New York, NBER, 1938.
13. Malkiel B. Expectations, Bond Prices, and the Term Structure of Interest Rates. *Quarterly Journal of Economics*, 1962, Vol. 76 (2), pp. 197–218.
14. Pianca P. Maximum Duration of Below Par Bonds: A Closed-form Formula. Available at: <http://ssrn.com/abstract=738445>
15. Redington F. M. Review of the Principles of Life-Office Valuations. *Journal of the Institute of Actuaries*, 1952, Vol. 78, No. 3, pp. 286–315.
16. Samuelson P. The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System. *American Economic Review*, 1945, Vol. 55, No. 1, pp. 16–27.