

АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОРРЕЛЯЦИИ МЕЖДУ ВРЕМЕННЫМИ РЯДАМИ, СВЯЗАННЫМИ МОДЕЛЬЮ TVP-РЕГРЕССИИ¹

Н. А. Моисеев, Г. В. Айвазян

Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Москва, Россия

В данном исследовании предложен алгоритм оценивания динамической корреляции временных рядов, связанных между собой моделью TVP-регрессии. Актуальность данной задачи обусловлена тем, что зачастую такая модель описывает поведение активов на финансовых рынках, а при помощи моделирования их корреляционной связи во времени можно учитывать риски, что является неотъемлемой частью построения стратегии формирования инвестиционного портфеля. Также такая методика может применяться при изучении эффекта распространения шоков на финансовых рынках во время кризисов. Цель исследования – оценка эффективности описанного в работе алгоритма в сравнении с классическим алгоритмом DCC GARCH. Сравнение данного алгоритма с методом DCC GARCH было проведено на синтетических данных при нескольких значениях дисперсии ошибки процесса. В результате при всех рассмотренных значениях дисперсий ошибки процесса предложенный алгоритм показал лучший результат в терминах среднеквадратической ошибки оцененной корреляции и реальной. Однако было замечено, что для более высоких значений ошибки процесса разница в качестве результата, полученного предложенным алгоритмом и методом DCC GARCH, снижается. В заключение были отмечены недостатки предложенного алгоритма.

Ключевые слова: линейная регрессия, DCC GARCH, финансовый рынок, инвестиционный портфель.

ALGORITHM OF ASSESSING DYNAMIC CORRELATION BETWEEN TIME SERIES CONNECTED BY TVP-REGRESSION MODEL

Nikita A. Moiseev, Grigory V. Aivazian

Plekhanov Russian University of Economics,
Moscow, Russia

The present research proposes algorithm of assessing dynamic correlation of time series connected by TVP-regression model. Topicality of this task is stipulated by the fact that this model often describes asset behavior on finance markets, while modeling of their correlation link over time could help take into account risks, which is an integral part of building strategy of shaping the investment portfolio. This methodology can also be used to study the effect of shock proliferation on finance markets in time of crises. The goal of the research is to assess efficiency of the algorithm described in the work in comparison with the classic algorithm DCC GARCH. Comparison of the present algorithm with DCC GARCH method was carried out on synthetic data with several values of process error dispersion. As a result with all considered values of dispersion of the process error the advanced algorithm showed best figures in terms of mean-square error of assessed and real correlation. However, it was noticed that for higher values of process error the difference in result obtained by advanced algorithm and DCC GARCH method drops. In conclusion certain drawbacks of the algorithm were shown.

Keywords: linear regression, DCC GARCH, finance market, investment portfolio.

¹ Статья подготовлена по результатам исследования, выполненного при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-78-10150 «Разработка системы оценки и оптимального планирования реализации государственных экономических проектов в условиях геополитических рисков».

Введение

Выявление взаимозависимости между финансовыми активами является важным элементом эффективного управления рисками и инвестициями. Традиционные методы анализа корреляции, основанные на статических предположениях, часто оказываются недостаточными для описания динамических взаимосвязей, которые присутствуют на финансовых рынках.

В последние десятилетия существенное внимание было уделено разработке моделей, которые могли бы учитывать динамику корреляции между финансовыми активами. Среди таких моделей выделяется метод DCC GARCH (Dynamic Conditional Correlation Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), предлагающий методику для моделирования изменяющейся во времени корреляции между несколькими временными рядами.

Метод DCC GARCH и его разновидности в последние годы часто используются для исследования передачи шоков на финансовых рынках [2; 5], в построении стратегии хеджирования [4] и для некоторых других задач [6].

В статье предлагается новый алгоритм моделирования корреляции между временными рядами как одна из альтернатив метода DCC GARCH. Цель данного исследования – сравнение качества выявления корреляционной структуры временных рядов предложенным алгоритмом и методом DCC GARCH. Для достижения данной цели проводится сравнительный анализ этих двух методов на синтетических данных.

Описание задачи

Рассмотрим модель с одной факторной переменной x , динамически влияющей на зависимую переменную (т. е. коэффициенты регрессии изменяются во времени):

$$z_t = a_{0t} + a_{1t} \cdot x_t + \varepsilon, \quad (1)$$

где $\varepsilon \in N(0, \sigma_z)$.

$$a_t = a_{t-1} + u, \quad (2)$$

где $a_t = (a_{0t}, a_{1t})$;

$$u \in N(0, \Sigma_u).$$

Корреляцию r_t между z_t и x_t по известному свойству регрессии можно рассчитать следующим образом [1]:

$$r_t = \frac{a_{1t} \cdot \sigma_x}{\sigma_z}, \quad (3)$$

где σ_x – дисперсия независимой переменной x (в нашем случае предполагается постоянной).

Допустим, что x_t и ε некоррелированы. В результате получим

$$r_t = \frac{a_{1t} \cdot \sigma_x}{\sqrt{a_{1t}^2 \cdot \sigma_x^2 \cdot \sigma_z^2}}. \quad (4)$$

Методология DCC GARCH

Общее уравнение модели DCC GARCH [4] представлено как

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad (5)$$

где H_t – матрица условной дисперсии;

D_t – диагональная матрица размера $k \times k$, имеющая условное среднеквадратическое отклонение $\sqrt{h_{it}}$ на своих диагоналях;

R_t – изменяющаяся во времени корреляционная матрица. Условная дисперсия (h_{it}) в данной модели оценивается с использованием одномерной модели GARCH (X , Y), как показано в уравнении (2).

$$h_{it} = \omega_i + \sum_{x=1}^{X_i} \alpha_{ix} r_{it-x}^2 + \sum_{y=1}^{Y_i} \beta_{iy} h_{it-y}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (6)$$

где ω_i , α_{ix} и β_{iy} неотрицательны;

$$\sum_{x=1}^{X_i} \alpha_{ix} + \sum_{y=1}^{Y_i} \beta_{iy} < 1;$$

r_{it-x}^2 – квадрат лаговых значений временных рядов;

k – количество моделируемых рядов.

В текущем исследовании часто используется одномерная модель GARCH (1, 1).

Отсюда находятся остатки (ε_t) и условные стандартные отклонения ($\sqrt{h_{it}}$). Условное стандартное отклонение выражается диагональной матрицей D_t , состоящей из элементов ($\sqrt{h_{it}}$) на диагоналях, как показано в уравнении (3):

$$D_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{h_{kk,t}} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Стандартизированные остатки $\left(\sigma_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\sqrt{h_{it}}}\right)$ в дальнейшем используются для оценивания динамической корреляционной матрицы R_t :

$$R_t = \hat{Q}_t^{-1} Q_t \hat{Q}_t^{-1}, \quad (8)$$

$$\hat{Q}_t = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{q_{kk}} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $\hat{Q}_t$ – диагональная матрица, состоящая из квадратных корней диагональных элементов матрицы Q_t , как указано в уравнении (5).

$$Q_t = (1 - a - b) \bar{Q} + a(\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}) + bQ_{t-1}, \quad (10)$$

где Q_t – симметричная положительная определенная матрица условной ковариации; $Q_t = (q_{ij,t})$;

$\bar{Q}$ – безусловная ковариация стандартизованного остатка одномерной модели GARCH.

$$\text{Условную корреляцию } \rho_{ij,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,j,t} q_{i,j,t}}}$$

можно выразить в типичной корреляционной форме следующим образом:

$$\rho_{ij,t} = \frac{(1 - a - b) \bar{Q} + a \varepsilon_{t-1} - 1 \varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1}}{\sqrt{(1 - a - b) \bar{Q} + a \varepsilon_{t-1} - 1 \varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1}} \sqrt{(1 - a - b) \bar{Q} + a \varepsilon_{t-1} - 1 \varepsilon'_{t-1} + bQ_{t-1}}}. \quad (11)$$

Как при оценивании параметров одномерных моделей GARCH, так и при оценивании параметров a и b в (6) используется метод максимального правдоподобия в предположении нормального распределения (более подробно см. [3]).

Предложенный алгоритм

Пусть N – число итераций алгоритма, n – длина ряда. Предположим, X – матрица размера $n \times 2$, где второй столбец – ряд x , а первый – столбец из единиц.

Исходя из [9] был предложен алгоритм получения оценки коэффициентов линейной регрессии.

Алгоритм

0. Априорно инициализируем матрицы S_p размера 2×2 , $S = S_p$; матрицы из нулей a_p размера $N \times n \times 2$, P_s размера $N \times n \times 2 \times 2$, M размера $N \times n \times 2$.
1. Для $k = 0, \dots, n - 1$:
2. Если $k = 0$:
3. Для $i = 1, \dots, n - 1$:
4. $p = 0$.
5. $P_s[k, i, :, :] = \frac{(S^{-1} + X[i, :]^T X[i, :])^{-1}}{\sigma_z^2}$.
6. $M[k, i, :] = \frac{a_p[p, i - 1, :] S^{-1} + z[i] X[i, :]^T}{\sigma_z^2} P_s[k, i, :, :]$.
7. $a_p[k, i, :] = M[k, i, :]$.
8. Иначе:
9. $p = k - 1$.

10. Для $i = 0, \dots, n - 1$:
11. Если $i > 0$ и $i < n - 1$:
12.
$$P_s[k, i, :, :] = \frac{(2 \cdot S^{-1} + X[i, :]^T X[i, :])^{-1}}{\sigma_z^2}.$$
13.
$$M[k, i, :] = \frac{(a_p[p, i - 1, :] + a_p[p, i + 1, :])S^{-1} + z[i]X[i, :]^T}{\sigma_z^2} P_s[k, i, :, :].$$
14. $a_p[k, i, :] = N(M[k, i, :], P_s[k, i, :, :])$, где $N(\cdot, \cdot)$ – многомерное нормальное распределение.
15. Иначе если $i = 0$:
16.
$$P_s[k, i, :, :] = \frac{(S^{-1} + X[i, :]^T X[i, :])^{-1}}{\sigma_z^2}.$$
17.
$$M[k, i, :] = \frac{(a_p[p, i + 1, :])S^{-1} + z[i]X[i, :]^T}{\sigma_z^2} P_s[k, i, :, :].$$
18. $a_p[k, i, :] = N(M[k, i, :], P_s[k, i, :, :])$.
19. Иначе если $i = n - 1$:
20.
$$P_s[k, i, :, :] = \frac{(S^{-1} + X[i, :]^T X[i, :])^{-1}}{\sigma_z^2}.$$
21.
$$M[k, i, :] = \frac{(a_p[p, i - 1, :])S^{-1} + z[i]X[i, :]^T}{\sigma_z^2} P_s[k, i, :, :].$$
22. $a_p[k, i, :] = N(M[k, i, :], P_s[k, i, :, :])$.
23. $V = 10\,000 + n - 1$.
24. Ω – матрица из нулей размера 2×2 .
25. Для $h = 1, \dots, n - 1$:
26. $\Omega = \Omega + (a_p[k, h, :] - a_p[k, h - 1, :])^T (a_p[k, h, :] - a_p[k, h - 1, :])$.
27. $\theta = S_p + \Omega$.
28. $S = W^{-1}(V, \theta)$, где $W^{-1}(\cdot, \cdot)$ – обратное распределение Уишарта.
29. Конец цикла

Число $a_p[m, t, 0]$, получаемое из алгоритма 1, есть оценка a_{0t} на итерации m , а число $a_p[m, t, 1]$ – оценка a_{1t} на итерации m .

С учетом формулы (4) и выражения $\overline{a_{p_i}^w} := \frac{a_p[w : N, t, 1]}{N - w}$ корреляцию в момент времени t будем оценивать как

$$\frac{\overline{a_{p_i}^w} \cdot \sigma_x}{\sqrt{\overline{a_{p_i}^w}^2 \cdot \sigma_x^2 + \sigma_z^2}}. \quad (12)$$

Результаты и обсуждение

В качестве эксперимента было сэмплировано 1 000 точек x из стандартного нормального распределения. Было использовано несколько разных σ_z в (1), а в (2) поло-

жено $\Sigma_a = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$. В алгоритме было

инициализировано $\Sigma_p = \begin{pmatrix} 0.0015 & 0 \\ 0 & 0.0015 \end{pmatrix}$,

выбрано число итераций $N = 4\,000$ и параметр усреднения из (12) $w = 400$.

В случае с $\sigma_z = 1$ алгоритм показал лучший результат, чем метод DCC GARCH, а именно среднеквадратическое отклонение алгоритма от истинной корреляции составило 9.67, а для DCC GARCH – 61.1 (рис. 1).

В случае с $\sigma_z = 2$ алгоритм также показал лучший результат, чем метод DCC GARCH, а именно среднеквадратическое отклонение алгоритма от истинной корреляции

ляции составило 15.3, а для DCC GARCH – 40.91 (рис. 2).

В случае с $\sigma_z = 4$ алгоритм показал немного лучший результат, чем метод DCC

GARCH, а именно среднеквадратическое отклонение алгоритма от истинной корреляции составило 21.4, а для DCC GARCH – 28.06 (рис. 3).

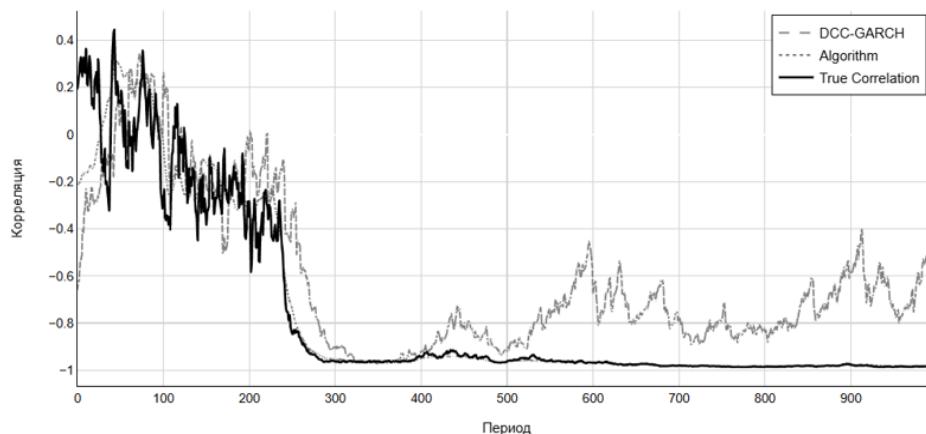


Рис. 1. График условной корреляции для синтетических данных с $\sigma_z = 1$

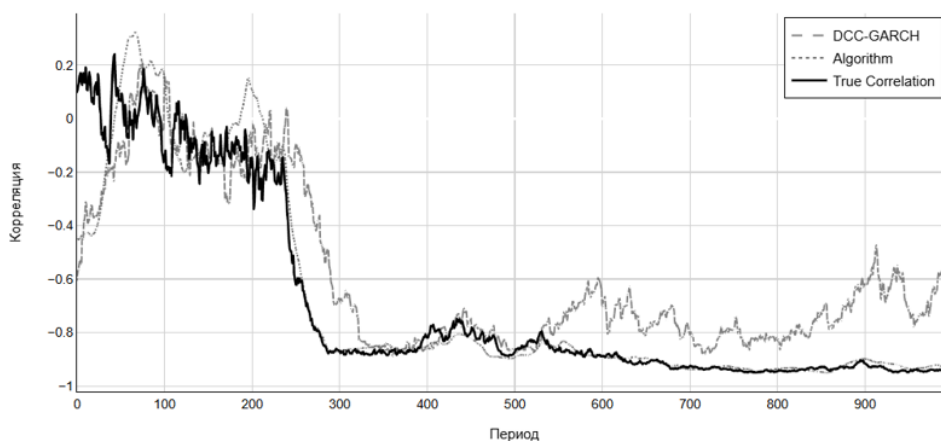


Рис. 2. График условной корреляции для синтетических данных с $\sigma_z = 2$

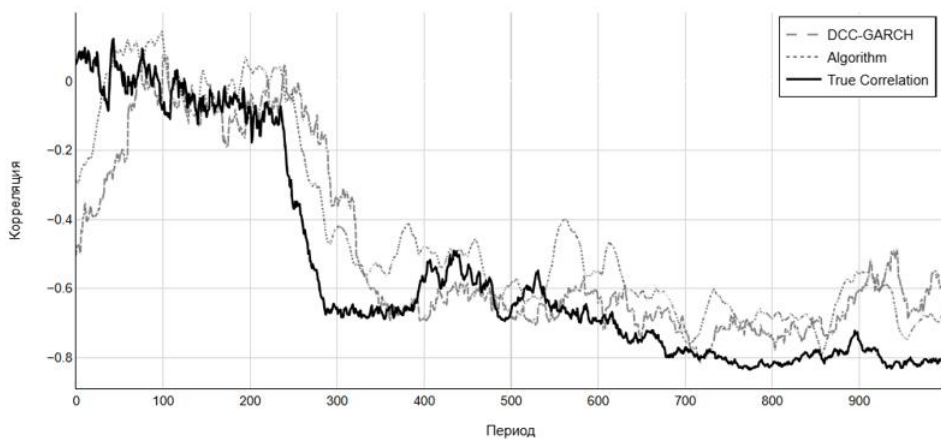


Рис. 3. График условной корреляции для синтетических данных с $\sigma_z = 4$

Из описанных выше результатов видно, что предложенный алгоритм во всех случаях показывает лучший результат, чем метод DCC GARCH. Однако чем больше дисперсия ошибки процесса, тем меньшей становится разница.

Заключение

Проведенный анализ показал, что предложенный алгоритм показывает лучший результат, чем классический алгоритм DCC GARCH, однако разница в качестве между алгоритмами падает с увеличением дисперсии случайной ошибки. Также су-

ществленным недостатком предложенного алгоритма является то, что дисперсия случайной ошибки предполагается известной. Как один из путей исправления этого недостатка – замена реальной дисперсии на ее оценку.

В дальнейших исследованиях планируется убрать предположение статической дисперсии процесса и сделать ее изменяющейся в соответствии с авторегрессионным законом [9. – С. 109], а также рассмотреть случай нескольких переменных.

Список литературы

1. Bala D. A., Takimoto T. Stock Markets Volatility Spillovers During Financial Crises: A DCC-MGARCH with Skewed-T Density Approach // *Borsa Istanbul Review*. – 2017. – Vol. 17. – N 1. – P. 25–48.
2. Engle R. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models // *Journal of Business & Economic Statistics*. – 2002. – Vol. 20 (3). – P. 339–350.
3. Fakhfekh M. et al. Hedging Stock Market Prices with WTI, Gold, VIX and Cryptocurrencies: A Comparison between DCC, ADCC and GO-GARCH Models // *International Journal of Emerging Markets*. – 2023. – Vol. 18. – N 4. – P. 978–1006.
4. Ji X. et al. Contagion Effect of Financial Markets in Crisis: An Analysis Based on the DCC-MGARCH Model // *Mathematics*. – 2022. – Vol. 10. – N 11. – P. 1819.
5. Joyo A. S., Lefen L. Stock Market Integration of Pakistan with its Trading Partners: A Multivariate DCC-GARCH Model Approach // *Sustainability*. – 2019. – Vol. 11. – N 2. – P. 303.
6. Nakajima J. et al. Time-Varying Parameter VAR Model with Stochastic Volatility: An Overview of Methodology and Empirical Applications // *Monetary and Economic Studies*. – 2011. – N 29. – P. 107–142.

References

1. Bala D. A., Takimoto T. Stock Markets Volatility Spillovers During Financial Crises: A DCC-MGARCH with Skewed-T Density Approach. *Borsa Istanbul Review*, 2017, Vol. 17, No. 1, pp. 25–48.
2. Engle R. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2002, Vol. 20 (3), pp. 339–350.
3. Fakhfekh M. et al. Hedging Stock Market Prices with WTI, Gold, VIX and Cryptocurrencies: A Comparison between DCC, ADCC and GO-GARCH Models. *International Journal of Emerging Markets*, 2023, Vol. 18, No. 4, pp. 978–1006.

4. Ji X. et al. Contagion Effect of Financial Markets in Crisis: An Analysis Based on the DCC-MGARCH Model. *Mathematics*, 2022, Vol. 10, No. 11, p. 1819.
5. Joyo A. S., Lefen L. Stock Market Integration of Pakistan with its Trading Partners: A Multivariate DCC-GARCH Model Approach. *Sustainability*, 2019, Vol. 11, No. 2, p. 303.
6. Nakajima J. et al. Time-Varying Parameter VAR Model with Stochastic Volatility: An Overview of Methodology and Empirical Applications. *Monetary and Economic Studies*, 2011, No. 29, pp. 107–142.

Поступила: 30.09.2024

Принята к печати: 18.12.2024

Сведения об авторах

Никита Александрович Моисеев

доктор экономических наук, профессор,
профессор кафедры математических методов
в экономике РЭУ им. Г. В. Плеханова.
Адрес: ФГБОУ ВО «Российский экономический
университет имени Г. В. Плеханова», 109992,
Москва, Стремянный пер., д. 36.
E-mail: Moiseev.NA@rea.ru
ORCID: 0000-0002-5632-0404

Григорий Витальевич Айвазян

аспирант кафедры
математических методов в экономике
РЭУ им. Г. В. Плеханова.
Адрес: ФГБОУ ВО «Российский
экономический университет
имени Г. В. Плеханова»,
109992, Москва,
Стремянный пер., д. 36.
E-mail: Aivazian.Grigory25@yandex.ru
ORCID: 0009-0008-2625-9332

Information about the authors

Nikita A. Moiseev

Doctor of Economics, Professor, Professor
of the Department for Mathematical Methods
in Economics of the PRUE.
Address: Plekhanov Russian University
of Economics, 36 Stremyanny Lane,
Moscow, 109992, Russian Federation.
E-mail: Moiseev.NA@rea.ru
ORCID: 0000-0002-5632-0404

Grigory V. Aivazian

Post-Graduate Student
of the Department
for Mathematical Methods
in Economics of the PRUE.
Address: Plekhanov Russian University
of Economics, 36 Stremyanny Lane,
Moscow, 109992,
Russian Federation.
E-mail: Aivazian.Grigory25@yandex.ru
ORCID: 0009-0008-2625-9332