



ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ РЕЕНТЕРАБЕЛЬНЫМИ РЕСУРСАМИ НА СЕТЕВЫХ ГРАФИКАХ С ОДНОРОДНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ¹

О. А. Косоруков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации;
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Москва, Россия

В статье рассматривается задача оптимального распределения ресурсов, выделенных на выполнение некоторого комплекса взаимосвязанных работ, по критерию минимизации времени выполнения всех работ. В отличие от традиционного ресурса сепарабельного типа показан ресурс реентерабельного типа, т. е. допускающий повторное использование. Представлена формализация данной задачи в динамической постановке. Для случая однородных линейных функций производительности приводится и обосновывается аналитическое решение. Продемонстрирована неоптимальность некоторых эвристических алгоритмов. Отмечен геометрический критерий оптимальности для случая двух независимых работ. На его основе строится пример полного внутреннего переключения ресурсов.

Ключевые слова: оптимизация, распределение ресурсов, сетевой график, функции интенсивности выполнения.

MANAGING RE-ENTERABLE RESOURCES ON NET GRAPHS WITH UNIFORM INTENSITY FUNCTIONS

Oleg A. Kosorukov

Lomonosov Moscow State University;
Russian Academy of National Economy and Public Administration
under the President of the Russian Federation;
Plekhanov Russian University of Economics,
Moscow, Russia

The article studies optimum distribution of resources assigned to a certain set of interconnected operations by the criterion of minimizing time necessary to accomplish all the operations. In contrast to the traditional resource of separable type a resource of re-enterable type was shown, i. e. the type permitting repeated use. Formalization of the task in dynamic setting was provided. For cases of uniform linear productivity functions analytical solution was given and substantiated. Non-optimal character of certain heuristic algorithms was shown. Geometric criterion of optimum character for cases of two independent operations was highlighted. On this basis the case of complete internal resources switching was built.

Keywords: optimization, resources distribution, net graph, functions of completion intensity.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00339, <https://rscf.ru/project/24-21-00339/>

Постановка задачи с сепарабельными ресурсами

Приведем постановку классической задачи оптимального распределения ресурсов на сетевом графике в детерминированном случае [5]. Пусть задан сетевой график с событиями z_1, \dots, z_n и дугами-работами l_1, \dots, l_m , где z_1 – начало всех работ; z_n – их окончание. Предположим также, что время выполнения всех работ есть функции от распределений ресурсов. При этом будем предполагать, что задано множество X распределений ресурсов и как только выбрано распределение ресурсов $x \in X$, сразу же определяются функции $\varphi_j(x)$, т. е. время выполнения работ l_j , $j = 1, \dots, m$. Будем считать, что функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, – непрерывные неотрицательные функции, а множество X – компактное множество евклидова пространства E^k .

Поставим задачу нахождения такого распределения ресурсов, чтобы время выполнения всего комплекса работ было минимальным при заданном распределении ресурсов. Если распределение ресурсов $x \in X$ выбрано, то минимальное время выполнения всего комплекса работ будет определяться из решения следующей задачи:

$$\min_t (t_n - t_1), \tag{1}$$

$$t_{n_2(j)} - t_{n_1(j)} \geq \varphi_j(x), t = (t_1, \dots, t_n), j = 1,$$

где $n_2(j)$ – номер вершины, являющейся окончанием дуги j ;

$n_1(j)$ – номер вершины, являющейся началом дуги j .

Если мы хотим выбрать такое распределение ресурсов, чтобы время выполнения работ было минимальным по всем распределениям ресурсов, то нам надо решить задачу

$$\min_x \min_t (t_n - t_1)$$

при ограничениях задачи (1). Объединяя два последовательных минимума в один, окончательно получаем

$$\min_{x, t} (t_n - t_1), \tag{2}$$

$$t_{n_2(j)} - t_{n_1(j)} \geq \varphi_j(x), t = (t_1, \dots, t_n), \\ j = 1, \dots, m, x \in X.$$

Особо отметим случай, когда распределяется один вид ресурса, например, деньги. В этом случае задача (2) будет иметь следующий вид:

$$\min_{x, t} (t_n - t_1), \tag{3}$$

$$t_{n_2(j)} - t_{n_1(j)} \geq \varphi_j(x), t = (t_1, \dots, t_n),$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), x_j \geq 0;$$

$$\sum_{j=1}^m x_j \leq A, j = 1, \dots, m,$$

где A – заранее заданное количество непрерывного ресурса, которое распределяется по всем работам. Данный вид ресурса не предполагает повторное использование, т. е. будучи распределенным на одну из работ он не может быть использован на другой. Такой вид ресурса будем называть сепарабельным. Задача (3) является сепарабельной нелинейного математического программирования, для которой известны многочисленные методы решения в зависимости от свойств функций $\varphi_j(x)$ [5]. Далее рассмотрим аналогичную задачу, но с иным видом ресурсов.

Постановка задачи с реентерабельными ресурсами

В данной статье рассматривается другой вид ресурсов, а именно ресурсы, допускающие повторное использование на различных работах в различные моменты времени, например, люди или техника. Такой вид ресурса будем называть реентерабельным. Приведем формализацию задачи, аналогичной задаче (3), но для реентерабельного ресурса. При этом будем рассматривать единственный ресурс в количестве A , предполагая его бесконечно делимым:

$$\min_{t, u} t_n, \tag{4}$$

$$\int_{t_{n_1(j)}}^{t_{n_2(j)}} W_j(u_j(z)) dz \geq A_j, j = 1, \dots, m,$$

$$u_1(t) + \dots + u_m(t) \leq A, t \in [0; T],$$

$$t_j \geq 0, j = 1, \dots, m,$$

где $W_j(u_j(z))$ – интенсивность выполнения j -й работы в момент времени t в зависимости от задействованного в момент времени t ресурса на выполнение этой работы;

A_j – объем j -й работы;

$u_j(t)$ – количество ресурса, выделенного на выполнение j -й работы в момент времени t ;

T – достаточно большое число, заведомо большее, чем время выполнения комплексов работ.

Предполагаем функции $W()$ непрерывными, положительными, монотонно возрастающими на множестве $[0; A]$. Поскольку их аргумент – объем ресурса, выделяемый на соответствующую работу, зависит от времени, получаем сложную функцию от времени. Смысл рассматриваемых функций $W()$ предполагает, что их интегрирование на каком-либо временном отрезке позволяет определить объем соответствующей работы, выполненный за данный временной отрезок в единицах исчисления соответствующей работы.

В качестве класса функций $u_j(t)$ целесообразно рассмотреть неотрицательные кусочно-непрерывные на отрезке $t \in [0; T]$ функции, если допустить возможность моментального перераспределения ресурса.

Функции моментальных интенсивностей $W_j()$ (т. е. объем выполняемых работ в единицу времени) в данной постановке задачи зависят только от моментального объема выделенных ресурсов и не зависят от стадии выполнения работы. Подобное упрощение адекватно лишь в случае однородных работ. Более общий случай был представлен в работе «Эвристические алгоритмы распределения ресурсов» [2].

Формализация (4) является оптимизационной задачей сложной конструкции, поскольку часть переменных оптимизации образует вектор в конечномерном пространстве $(t_1, \dots, t_n) \in R^n$, а другая часть образует вектор функции из бесконечномерного пространства $(u_1(t), \dots, u_m(t)) \in U$. Такого рода задачи не вписываются в какие-либо классы оптимизационных задач, подкрепленных аналитическими или числен-

ными методами. В статье «Эвристические алгоритмы распределения ресурсов» [2] данная задача была формализована в виде задачи оптимального управления, а именно классической задачи о быстродействии [9].

Задача с однородными линейными функциями интенсивностей

Рассмотрим задачу (4) с функциями интенсивностей следующего вида:

$$W_j(u_j(t)) = a_j u_j(t).$$

Рядом авторов [2] в качестве примера была рассмотрена задача данного типа для двух независимых работ. Используя формализацию данной задачи в виде задачи оптимального управления и принцип максимума Понтрягина, было получено оптимальное решение, которое по функционалу выражалось как

$$T^* = \frac{1}{A} \left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} \right).$$

Содержательно это означает, что в данной задаче нет необходимости производить ни распределение ресурсов по работам, ни тем более какое-либо динамическое перераспределение ресурса в ходе выполнения работ. Достаточно последовательно направлять весь имеющийся ресурс на каждую из двух работ. Докажем этот результат для произвольного сетевого графика с однородными линейными функциями интенсивностей.

Теорема 1. Для задачи (4) в случае линейных однородных функций интенсивностей выполнения работ $W_j(u_j(t)) = a_j u_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, оптимальное время выполнения комплекса работ есть

$$T^* = \frac{1}{A} \left(\frac{A_1}{a_1} + \dots + \frac{A_m}{a_m} \right).$$

Доказательство.

Для рассматриваемого случая задача (4) принимает следующий вид:

$$\min_{t, u} t_n \tag{5}$$

$$a_j \int_{t_{n_1(j)}}^{t_{n_2(j)}} u_j(z) dz \geq A_j, \quad j = 1, \dots, m, \tag{6}$$

$$u_1(t) + \dots + u_m(t) \leq A, \quad t \in [0; T], \tag{7}$$

$$t_j \geq 0, j = 1, \dots, m.$$

Ограничения (6) можно заменить на строгие равенства, поскольку ресурс $u_j(t)$ выделяется строго на работу j объемом V_j и нет никаких оснований для его выделения в большем объеме. Аналогично можно рассматривать строгое равенство в ограничении (7). Недоиспользование ресурса в силу монотонного неубывания функций интенсивностей $W_j()$ никак не может ускорить время выполнения проекта. С учетом этого запишем эквивалентный вид задачи:

$$\min_{t, u} t_n, \quad (8)$$

$$\int_{t_{n_1(j)}}^{t_{n_2(j)}} u_j(z) dz = \frac{A_j}{a_j}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

$$u_1(t) + \dots + u_m(t) = A, \quad t \in [0; T],$$

$$t_j \geq 0, j = 1, \dots, m.$$

Решение задачи (8), как и задачи (5), всегда существует в силу известной теоремы о существовании минимума непрерывной функции на замкнутом ограниченном множестве. Очевидно, можно утверждать, что существует оптимальное решение задачи (8), такое, что

$$u_j(t) = 0, \quad \forall t \notin [t_{n_1(j)}, t_{n_2(j)}]. \quad (10)$$

Далее рассмотрим решение (t, u) такого вида. Упорядочим последовательность значений вектора t , а именно t_{k_1}, \dots, t_{k_n} . Очевидно, что $t_{k_1} = t_1$, а $t_{k_n} = t_n$. Из ограничений задачи (8) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_{t_{k_{i-1}}}^{t_{k_i}} u_j(t) dt &= \int_{t_{k_{i-1}}}^{t_{k_i}} \left(\sum_{j=1}^m u_j(t) \right) dt = \\ &= A(t_{k_i} - t_{k_{i-1}}), i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения (9) и условие (10), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^m \int_{t_{k_{i-1}}}^{t_{k_i}} u_j(t) dt &= \sum_{i=2}^n A(t_{k_i} - t_{k_{i-1}}) = A(t_n - t_1) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=2}^n \int_{t_{k_{i-1}}}^{t_{k_i}} u_j(t) dt = \sum_{j=1}^m \int_{t_{n_1(j)}}^{t_{n_2(j)}} u_j(t) dt = \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{a_j}. \end{aligned}$$

Следовательно, в рассматриваемом оптимальном решении

$$A(t_n - t_1) = \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{a_j}.$$

Откуда и следует утверждение теоремы

$$T^* = (t_n - t_1) = \frac{1}{A} \left(\frac{A_1}{a_1} + \dots + \frac{A_m}{a_m} \right).$$

Поскольку $\frac{1}{A} \frac{A_j}{a_j}$ есть время выполне-

ния полным ресурсом A работы j , полученное в теореме время выполнения комплекса работ соответствует последовательному выполнению работ с привлечением полного ресурса. Допустимый порядок выполнения работ определяется сетевым графиком и не является однозначным, что не влияет на время выполнения комплекса работ.

Задача с однородными нелинейными функциями интенсивностей

Исследование начнем с рассмотрения простейшего сетевого графика. Пусть имеются только две независимые работы с нелинейными функциями интенсивностей $W_1(u)$ и $W_2(u)$ с объемами A_1 и A_2 соответственно. Для исследования будем использовать оптимизационную модель в среде Excel. Поскольку мы не можем проводить в Excel бесконечномерную оптимизацию по всему классу функций, то рассмотрим в качестве класса функций $u(t)$ кусочно-постоянные функции с не более чем одним переключением. В связи с этим введем некоторые дополнительные обозначения и формализуем задачу в этом классе функций:

$$\min_{u_1, u_2, t, T} T, \quad (11)$$

$$W_1(u_1)t + W_1(u_2)(T - t) \geq A_1,$$

$$W_2(A - u_1)t + W_2(A - u_2)(T - t) \geq A_2,$$

$$0 \leq t \leq T,$$

$$0 \leq u_1 \leq A,$$

$$0 \leq u_2 \leq A,$$

где u_1 - ресурс на выполнение работы 1 в период времени от 0 до t ;

u_2 – ресурс выполнения работы 1 в период времени от t до T .

t – момент переключения, при $t = 0$ или $t = T$ переключение отсутствует.

Далее проведем тестирование различных возможных алгоритмов решения задачи (11). Для этого проведем ряд вычислительных экспериментов с различными функциями интенсивностей и различными числовыми параметрами и сделаем выводы. Рассмотрим следующие алгоритмы:

1. *Алгоритм последовательного выполнения (АПВ)*. Этот алгоритм подразумевает последовательное выполнение работ с выделением соответственно полного объема ресурсов на каждую работу. Именно этот алгоритм оказался оптимальным для линейного случая, рассмотренного нами выше.

2. *Алгоритм синхронного завершения (АСЗ)*. Алгоритм предполагает, что параллельные независимые работы, завершающиеся в одной вершине сетевого графика, завершаются одновременно. Зачем завершать какую-либо из таких работ раньше остальных? Ведь от этого финальное событие раньше не наступит. Можно сократить часть выделяемого ресурса на выполнение такой досрочной работы и отдать его на ускорение более продолжительных работ.

3. *Алгоритм максимальной интенсивности (АМИ)*. Алгоритм предполагает, что в каждый момент времени рассматриваются все работы, которые могут выполняться, и ресурс распределяется между ними таким образом, что суммарная интенсивность будет максимальной. Ожидаем, что максимизация общей производительности в каждый момент времени приведет нас к оптимальному решению.

Тестирование алгоритма АПВ

Пример 1

$$W_1(u) = u^2, W_2(u) = 2u^2, A = 6, A_1 = 20, A_2 = 40.$$

Результаты оптимизации представлены на рис. 1. Как видно из результатов решения, сначала полным ресурсом выполнялась работа 2 до момента времени 0,56; далее произошло полное переключение на

работу 1, которая завершилась в момент времени 1,11. Тем самым реализовался алгоритм АПВ.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5	T	1,11		A1	20		Путь 1	20
6	u1	0,00		A2	40		Путь 2	40
7	u2	6,00		A	6			
8	t	0,56						
9								
10	Время	1,11						
11								

Рис. 1. Решение примера 1

Вывод по примеру 1: алгоритм АПВ может приводить к оптимальному решению.

Пример 2

$$W_1(u) = \sqrt{u}, W_2(u) = 2\sqrt{u},$$

$$A = 6, A_1 = 20, A_2 = 40.$$

Результаты оптимизации представлены на рис. 2. Как видно из результатов решения, переключения ресурсов не происходит, работы выполняются параллельно с использованием ресурсов в количестве 3 и 3 и завершаются одновременно в момент времени 11,55. Значение в ячейке В7 не является существенным, так как не оказывает влияния на решение. Тем самым реализуется алгоритм АСЗ.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5	T	11,55		S1	20		Путь 1	20
6	u1	3,00		S2	40		Путь 2	40
7	u2	1,00		A	6			
8	t	11,55						
9								
10	Время	11,55						
11								

Рис. 2. Решение примера 2

Вычислим результат алгоритма АПВ для примера 2: $\frac{20}{\sqrt{6}} + \frac{40}{2\sqrt{6}} = 16,33$. Как видим, он не является оптимальным.

Вывод по примеру 2: алгоритм АПВ может не приводить к оптимальному решению.

Общий вывод по алгоритму АПВ: алгоритм АПВ может приводить, а может и не приводить к оптимальному решению.

Тестирование алгоритма АСЗ

На основе примера 2 можно сделать вывод: алгоритм АСЗ может приводить к оптимальному решению.

Вычислим результат применения алгоритма АСЗ для примера 1: $\frac{20}{u^2} = \frac{40}{2(6-u)^2}$, $u = 3$. Отсюда время выполнения проекта равно $\frac{20}{9} = 2,22$. Согласно

примеру 1 это время не является оптимальным, а следовательно, алгоритм АСЗ не приводит к оптимальному решению.

Общий вывод по алгоритму АСЗ: алгоритм АСР может приводить, а может и не приводить к оптимальному решению.

Тестирование алгоритма АМИ

Пример 3

$$W_1(u) = 20\sqrt{u}, W_2(u) = u^2,$$

$$A = 6, A_1 = 20, A_2 = 40.$$

Результаты решения представлены на рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5	T	1,35	S1	20	Путь 1	19,99998		
6	u1	0,55	S2	40	Путь 2	40		
7	u2	0,55	A	6				
8	t	0,82						
9								
10	Время	1,35						
11								

Рис. 3. Решение примера 3

Теперь решим пример, используя алгоритм АМИ. Найдем распределение ресурса, которое обеспечивает максимальную интегральную интенсивность работ. Функция интегральной интенсивности:

$$F(u) = 20\sqrt{u} + (6-u)^2.$$

Далее вычислим производную данной функции:

$$F'(u) = \frac{20}{2\sqrt{u}} - 2(6-u).$$

Стационарной точкой, которая соответствует максимуму функции, является точка $u = 1$. Это означает, что согласно алгоритму АМИ необходимо начать выполне-

ние работы 1 с ресурсом 1, а работу 2 с ресурсом 5. Согласно алгоритму АМИ это распределение ресурсов сохраняется до завершения первой из работ. Время завершения работы 1 составляет 1, а работы 2 – 1,6. Следовательно, перераспределение ресурсов произойдет через время 1 после завершения работы 1. К этому моменту остаток работы 2 составит 15, который начнет выполняться полным ресурсом 6 и, соответственно, завершится за время 0,42. Таким образом, полное время проекта составит 1,42, что больше оптимального времени 1,35.

Вывод по примеру 3: алгоритм АМИ может не приводить к оптимальному решению.

Можно заметить, что если бы объем работы 2 был бы не 40, а 25, то результат применения АМИ привел бы к оптимальному решению. Правда, в этом случае это решение получалось бы также по алгоритму АСЗ.

Общий вывод по алгоритму АМИ: алгоритм АМИ может приводить, а может и не приводить к оптимальному решению.

Таким образом, ни один из вышеизложенных трех «разумных» рассмотренных нами алгоритмов не является алгоритмическим решением для задачи (11), а следовательно, и для более широкого класса задач.

Вопрос о существовании оптимального внутреннего переключения

Рассмотрим вышеприведенную задачу. Пусть имеются только две независимые работы с нелинейными функциями интенсивностей $W_1(u)$ и $W_2(u)$ с объемами A_1 и A_2 соответственно. Помимо уже сделанных ранее предположений относительно функций интенсивностей $W(u)$, считаем функции $W()$ непрерывными, положительными, монотонно возрастающими на множестве $[0; A]$. Будем дополнительно предполагать их дифференцируемость.

Под внутренним переключением будем понимать решение задачи (11), а именно

кусочно-постоянные функции с не более чем одним переключением, для которого ограничения задачи (11) выполняются как строгие неравенства: $0 < t < T$, $0 < u_1 < A$, $0 < u_2 < A$ и $u_1 \neq u_2$. Содержательно это означает, что перераспределение ресурсов происходит не в связи с началом или с окончанием какой-то работы, а в процессе выполнения обеих работ. Для определенности предполагаем, что $u_1 < u_2$. Данное предположение не нарушает общности задачи, поскольку в противном случае достаточно поменять местами индексацию функций интенсивностей $W_1(u)$ и $W_2(u)$. Заметим, что во всех примерах, рассмотренных нами, оптимальные решения не являлись внутренними переключениями. В связи с этим возникает естественный вопрос: возможен ли такой набор функций интенсивностей для задачи (11), а именно $W_1(u)$ и $W_2(u)$, при которых оптимальное решение является внутренним переключением? Оказывается, что существует, но поиск такого примера является нетривиальной задачей. Различные комбинации функций интенсивностей из классов выпуклых, вогнутых и выпукло-вогнутых функций (типа x^3) не приводили к оптимальному внутреннему переключению.

Рассмотрим еще более частный случай задачи (11), а именно, когда обе работы одинаковые, т. е. $W_1(u) = W_2(u) = W(u)$ и $A_1 = A_2 = a$. Существует ли задача данного типа, все оптимальные решения которой являются внутренними переключениями? Задача (11) принимает в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \min_{u_1, u_2, t, T} T, \\ W(u_1)t + W(u_2)(T - t) \geq a, \\ W(A - u_1)t + W(A - u_2)(T - t) \geq a, \\ 0 \leq t \leq T, \\ 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq A. \end{aligned} \quad (12)$$

Для поиска, интересующего нас примера приведем геометрическую интерпретацию задачи (12). Рассмотрим фазовое пространство, в котором в качестве координаты x выступает значение $W(u)$, а в качестве

координаты y значение $W(A - u)$. Кривую данного пространства, которая соответствует значениям параметра u от 0 до A , назовем кривой интенсивностей. Координаты точек данной кривой представляют множество всех возможных моментальных распределений интенсивностей между работами. Данная кривая является симметричной относительно биссектрисы положительного квадранта координатной плоскости.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_1 = t, k_2 = T - t, x_1 = W(u_1), y_1 = W(A - u_1), \\ x_2 = W(u_2), y_2 = W(A - u_2). \end{aligned}$$

Тогда задача (12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \min_{u_1, u_2, k_1, k_2} (k_1 + k_2), \\ k_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$0 \leq k_1, 0 \leq k_2, 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq A.$$

Выражение (3) дает возможность геометрически «увидеть» решение задачи. Имеем параметрически заданную кривую в осях x и y , а именно: $x = W(u)$, $y = W(A - u)$, $0 \leq u \leq A$. Далее будем называть ее кривой интенсивностей. Пример такой кривой представлен на рис. 1. Какими свойствами обладает данная кривая?

1. Она всегда начинается в точке $(0, W(A))$, которая соответствует значению параметра $u = 0$, и заканчивается в точке $(W(A), 0)$, которая соответствует значению параметра $u = A$.

2. Кривая является симметричной относительно биссектрисы первого квадранта координатной плоскости ($y = x$). Это следует из того, что точки, соответствующие параметрам u и $A - u$, а именно, $(W(u), W(A - u))$ и $(W(A - u), W(u))$, обладают указанной симметрией.

3. Функция $y(x)$ является убывающей. Это следует из того, что если $u_1 < u_2$, то $W(A - u_1) > W(A - u_2)$.

Как мы видим, кривая интенсивностей на рис. 4 обладает вышеуказанными свойствами.

Согласно постановке (13) в нашем распоряжении 4 рычага управления: переменные u_1 и u_2 , которые определяют векторы (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , и переменные k_1, k_2 . Рассмотрим изолинии функционала при фиксированных значениях параметра u_1 и u_2 , которым соответствуют точки P и Q на рис. 4.

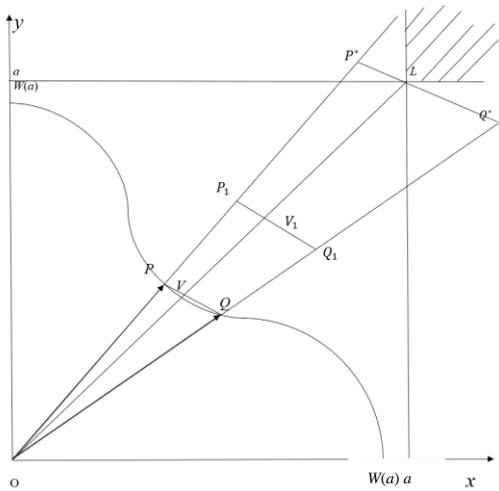


Рис. 4. Геометрическое представление задачи (13) (случай 1)

Изолиниями являются отрезки между лучами $[O, P]$ и $[O, Q]$, параллельные отрезку $[P, Q]$, например, $[P_1, Q_1]$ (рис. 4). Рассматриваем случай, когда P и Q находятся по разные стороны от биссектрисы (случай 1). Значение функционала для отрезка $[P, Q]$ равно 1, а для отрезка $[P_1, Q_1]$ – величине $\frac{|OV_1|}{|OV|}$. Как нетрудно заметить,

выполнение условий задачи (13) означает, что отрезок, параллельный отрезку $[P, Q]$, имеет непустое пересечение с заштрихованной прямоугольной областью с вершиной в точке L (рис. 4). Такой отрезок, которому соответствует минимальное значение функционала, есть отрезок $[P^*, Q^*]$, а соответствующее значение функционала равно $\frac{|OL|}{|OV|}$. Отсюда в свою очередь следует, что

минимальное значение функционала достигается при максимальном значении длины $|OV|$.

Таким образом, геометрическим решением задачи является нахождение на кри-

вой интенсивностей таких точек P и Q , для которых точка V будет максимально удалена от точки O . Заметим также, что в нашем случае точки P и Q выбирались лежащими по разные стороны от биссектрисы положительного квадранта (случай 2). Исследуем далее вопрос о целесообразности выбора точек P и Q по одну сторону биссектрисы (рис. 5).

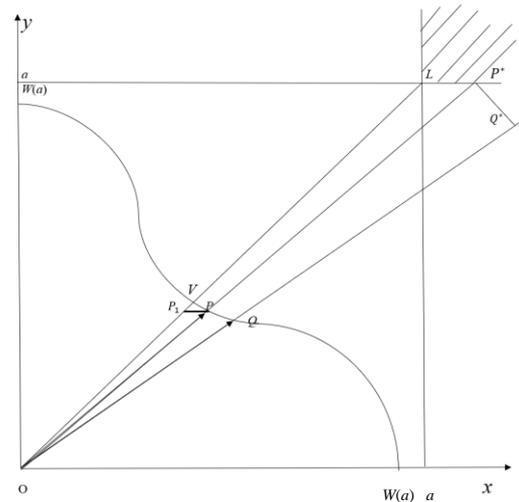


Рис. 5. Геометрическое представление задачи (13) (случай 2)

В этом случае положение изолинии функционала, при котором достигается минимум функционала, есть отрезок $[P^*, Q^*]$, параллельный отрезку $[P, Q]$ (рис. 4), а значение функционала в этом случае равно $\frac{|OP^*|}{|OP|}$.

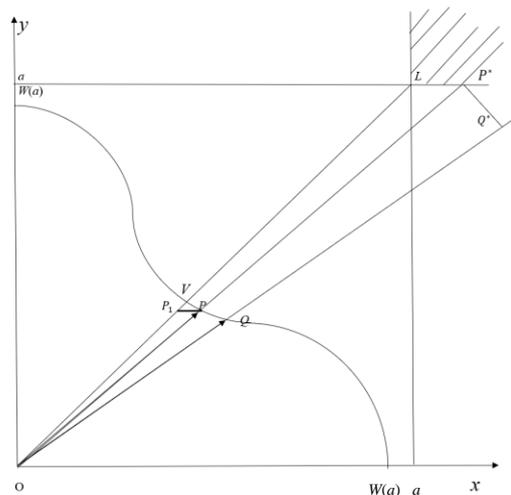


Рис. 6. Случай выпуклой кривой интенсивностей

Далее построим отрезок $[P, P_1]$, параллельный отрезку $[P^*, L]$. Теперь сравним текущее значение минимального функционала для данного выбора точек P и Q с результатом, соответствующим выбору $P = Q = V$, где V есть точка пересечения кривой интенсивностей с биссектрисой положительного квадранта. Для данного выбора точек минимальное значение функционала равно $\frac{|OL|}{|OV|}$. Справедлива следующая цепочка неравенств и следствий из них:

$$|OP_1| < |OV| \rightarrow \frac{|OL|}{|OV|} < \frac{|OL|}{|OP_1|} = \frac{|OP^*|}{|OP|}.$$

Это означает, что выбор $P = Q = V$ всегда лучше, чем выбор произвольных точек P и Q , лежащих по одну сторону от биссектрисы положительного квадранта.

Таким образом, при поиске геометрического решения достаточно рассматривать только точки P и Q по разные стороны биссектрисы, а в предельном случае – совпадающими и лежащими на ней.

Далее исследуем несколько частных случаев.

1. Пусть функция $W(u)$ является выпуклой (рис. 6). Тогда, используя формулу дифференцирования для параметрически заданной функции, имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{W}(A-u)\dot{W}(u) + \ddot{W}(u)\dot{W}(A-u)}{\dot{W}(u)^3}. \quad (14)$$

Поскольку $\dot{W}(u) \geq 0$, так как функция $W(u)$ неубывающая, и $\ddot{W}(u) \geq 0$, так как функция $W(u)$ выпуклая, имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0,$$

а следовательно, кривая интенсивностей выпукла (рис. 7).

В этом случае с учетом применения вышеизложенных геометрических идей очевидно, что оптимальное положение точек P^* и Q^* следует выбирать, как показано на рис. 6. В этом случае $u^*_1 = 0$, а $u^*_2 = A$. Это соответствует последовательному выполнению работ с использованием полно-

го ресурса. Продемонстрируем это далее на конкретном численном примере. Для данного случая может служить рассмотренный ранее пример 1 с тем отличием, что функции интенсивностей в нем выпуклые, но отличные друг от друга. Его численное решение, как мы видели, действительно в качестве оптимального решения предлагает последовательное выполнение работ. Дополнительно построим кривую интенсивностей для примера 1 (рис. 7).

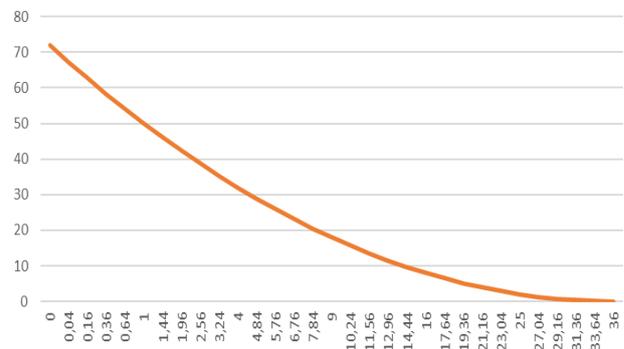


Рис. 7. Кривая интенсивностей для примера 1

Как мы видим, нарушается свойство симметричности, но сохраняется свойство выпуклости графика кривой интенсивностей, а следовательно, наши геометрические рассуждения остаются справедливыми.

2. Пусть функция $W(u)$ является вогнутой. Вновь воспользуемся формулой (14).

Поскольку $\dot{W}(u) \geq 0$, так как функция $W(u)$ неубывающая, и $\ddot{W}(u) \leq 0$, так как функция $W(u)$ вогнутая, имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} \leq 0,$$

а следовательно, кривая интенсивностей вогнутая (рис. 8).

В этом случае с учетом применения вышеизложенных геометрических идей очевидно, что оптимальное положение точек P^* и Q^* следует выбирать, как показано на рис. 5. В этом случае $u^*_1 = u^*_2 = u^* = 0,5 A$. Если функции интенсивностей вогнутые, но неодинаковые, u^* является корнем уравнения $W_1(u) = W_2(A - u)$, которое в си-

лу свойств функций интенсивностей имеет единственное решение. Это соответствует параллельному выполнению работ с распределением ресурса u^* и $(A - u^*)$.

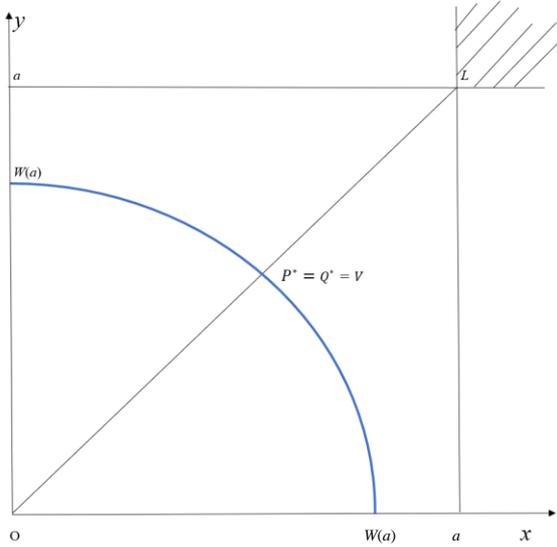


Рис. 8. Случай вогнутой кривой интенсивностей

Продemonстрируем это далее на конкретном численном примере. Для данного случая может служить рассмотренный ранее пример 2 с тем отличием, что функции интенсивностей в нем вогнутые, но отличные друг от друга. Его численное решение, как мы видели, действительно в качестве оптимального решения предлагает параллельное выполнение работ с синхронным завершением. Дополнительно построим кривую интенсивностей для примера 2 (рис. 9).

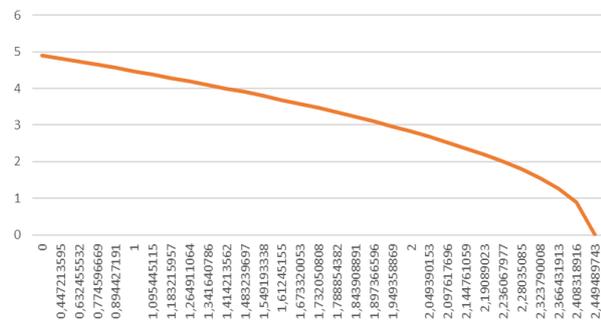


Рис. 9. Кривая интенсивностей для примера 2

Как мы видим, нарушается свойство симметричности, но сохраняется свойство

вогнутости графика кривой интенсивностей, а следовательно, наши геометрические рассуждения остаются справедливыми.

Вернемся теперь к вопросу, поставленному ранее: возможен ли такой набор функций интенсивностей для задачи (11), а именно $W_1(u)$ и $W_2(u)$, при которых оптимальное решение является внутренним переключением? Из рассмотренных случаев 1 и 2 понятно, что в классе выпуклых или вогнутых функций интенсивностей это невозможно. Из сформированного нами выше геометрического подхода понятно, что внутреннее переключение возможно для выпукло-вогнутой кривой интенсивности, как, например, показано на рис. 10. Там же показаны точки P^* и Q^* , построенные на основе геометрического подхода.

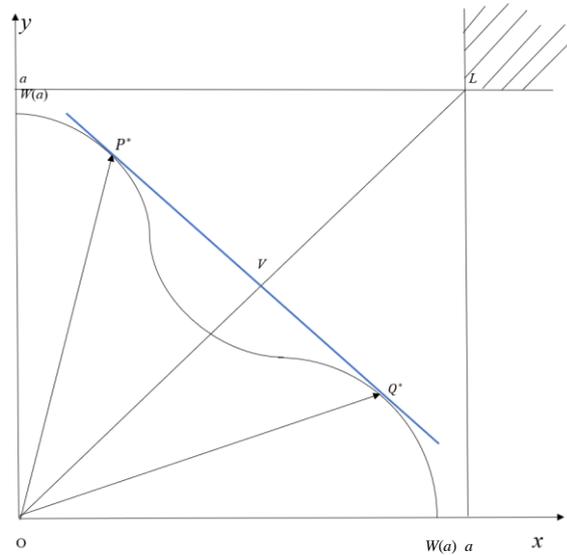


Рис. 10. Выпукло-вогнутая кривая интенсивностей

Чтобы убедиться в реальности такого случая, рассмотрим конкретный численный пример 4.

Пример 4

$$W_1(u) = W_2(u) = u + \frac{1}{6} \sin(\pi u),$$

$$A = 3, A_1 = 20, A_2 = 20.$$

Функции интенсивностей являются выпукло-вогнутыми. Кривая интенсивностей

представлена на рис. 11 и также является выпукло-вогнутой функцией.

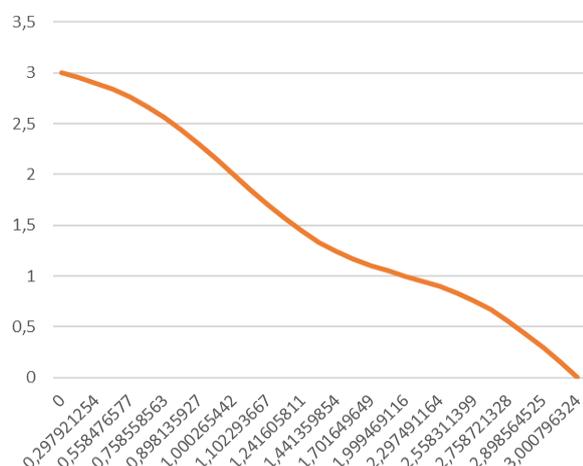


Рис. 11. Кривая интенсивностей для примера 4

Результаты решения представлены на рис. 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5	T	12,00		A1	20		Путь 1	19,99999
6	u1	2,50		A2	20		Путь 2	19,99999
7	u2	0,50		A	3			
8	t	6,00						
9								
10	Время	12,00						

Рис. 12. Решение примера 4

Как видно из полученного результата, решение данной задачи является полным внутренним переключением, что, собственно, мы и ожидали, исходя из геометрии кривой интенсивностей.

Заключение

Была рассмотрена задача оптимального распределения реентерабельных ресурсов для выполнения комплекса независимых работ. Для наиболее простого случая, а именно случая однородных линейных функций производительностей, получено и обосновано аналитическое решение. Для случая нелинейных однородных функций производительностей проведено исследование некоторых алгоритмов распределения ресурсов и показана их неоптимальность в общем случае. Поставлен вопрос о существовании полного внутреннего переключения как решения поставленной задачи в случае двух работ. Введено понятие кривой интенсивностей и на его основе построен геометрический критерий оптимальности. Приведен конкретный численный пример с полным внутренним переключением в качестве оптимального решения.

Список литературы

1. Алферов В. И., Будков О. В., Бурков В. Н. Определение планов анализа и оптимизации комплекса операций при перемещении ресурсов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7. – № 5. – С. 171–174.
2. Алферов В. И., Бурков В. Н., Кравцов А. Е., Карпов Ю. А. Эвристические алгоритмы распределения ресурсов // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2009. – № 12. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/evristicheskie-algoritmy-raspredeleniya-resursov> (дата обращения: 09.07.2025).
3. Баркалов С. А., Моисеев С. И., Сухомлинов А. И. Методика оптимизации сетевого графика путем перераспределения ресурсов // Проектное управление в строительстве. – 2021. – № 3 (24). – С. 5–30.
4. Бурков В. Н., Волков А. А., Нехай Р. Г. Задача распределения ресурсов в мультипроекте // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Управление строительством. – 2014. – № 1 (6). – С. 10–20.
5. Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е. Прикладные задачи теории графов. – Тбилиси: Мецнииреба, 1974.

6. Бурков В. Н., Россихина Л. В., Вьюнов А. П., Роговая Л. В. Задача оптимального распределения команд специалистов // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 1. – С. 116–125.
7. Коновалов О. А., Коновальчук Е. В., Прохорский Р. А., Винокуров Д. С. Анализ условий решения задачи распределения ресурсов с ограничениями факторного пространства // Вестник ВГУ. Серия: системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 2. – С. 82–92.
8. Косоруков О. А., Белов А. Г. Задача управления ресурсами на сетевых графиках как задача оптимального управления // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2014. – № 2. – С. 29–33.
9. Косоруков О. А., Лемтюжникова Д. В., Мищенко А. В. Методы и модели управления ресурсами проекта в условиях неопределенности // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2023. – Т. 2. – № 3. – С. 38–56.
10. Ляхов О. А. Модель календарного планирования проектов с перераспределением нескладированных ресурсов // Вестник Бурятского государственного университета – Улан-Удэ. – 2010. – Вып. 9. – С. 119–124.
11. Ляхов О. А. Ресурсы в сетевом планировании сложных комплексов работ // Проблемы информатики. – 2013. – № 1 (18). – С. 27–36.
12. Mironov A. A., Tsurkov V. I. Transport-type Problems with a Minimax Criterion // Automation and Remote Control. – 1995. – Vol. 56 (12). – N 12. – P. 1752–1759.

References

1. Alferov V. I., Budkov O. V., Burkov V. N. Opredelenie planov analiza i optimizatsii kompleksa operatsiy pri peremeshchenii resursov [Fixing Plans of Analysis and Optimization in Operation Complex during Resource Relocation]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Voronezh State Technical University], 2011, Vol. 7, No. 5, pp. 171–174. (In Russ.).
2. Alferov V. I., Burkov V. N., Kravtsov A. E., Karpov Yu. A. Evristicheskie algoritmy raspredeleniya resursov [Heuristic Algorithms of Resource Distribution]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Voronezh State Technical University], 2009, No. 12. (In Russ.). Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/evristicheskie-algoritmy-raspredeleniya-resursov> (accessed 09.07.2025).
3. Barkalov C. A., Moiseev S. I., Sukhomlinov A. I. Metodika optimizatsii setevogo grafika putem pereraspredeleniya resursov [Methodology of Net Graph Optimization by Resource Redistribution]. *Proektnoe upravlenie v stroitelstve* [Project Management in Construction], 2021, No. 3 (24), pp. 5–30. (In Russ.).
4. Burkov V. N., Volkov A. A., Nekhay R. G. Zadacha raspredeleniya resursov v multiproekte [The Task of Resource Distribution in Multi-Project]. *Nauchnyy vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo univ'ersiteta. Seriya: Upravlenie stroitel'stvom* [Academic Bulletin of the Voronezh State Architecture and Construction University. Series: Construction Management], 2014, No. 1 (6), pp. 10–20. (In Russ.).
5. Burkov V. N., Gorgidze I. A., Lovetskiy S. E. Prikladnye zadachi teorii grafov [Applied Tasks in Graph Theory]. Tbilisi, Metsniireba, 1974. (In Russ.).
6. Burkov V. N., Rossikhina L. V., Vyunov A. P., Rogovaya L. V. Zadacha optimalnogo raspredeleniya komand spetsialistov [The Task of Optimum Distribution of Specialist Teams]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Tele-Mechanics], 2019, No. 1, pp. 116–125. (In Russ.).

7. Konovalov O. A., Konovalchuk E. V., Prokhorskiy R. A., Vinokurov D. S. Analiz usloviy resheniya zadachi raspredeleniya resursov s ogranicheniyami faktornogo prostranstva [Analyzing Conditions of Resolving Tasks of Resources Distribution with Restrictions on Factor Space]. *Vestnik VGU. Seriya: sistemniy analiz i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of VGU. Series: System Analysis and Information technologies]. 2018, No. 2, pp. 82–92. (In Russ.).

8. Kosorukov O. A., Belov A. G. Zadacha upravleniya resursami na setevykh grafikakh kak zadacha optimalnogo upravleniya [The Task of Resource Management on Net Graphs as Task of Optimum Management]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of the Moscow University. Series 15. Computer Mathematics and Cybernetics], 2014, No. 2, pp. 29–33. (In Russ.).

9. Kosorukov O. A., Lemtyuzhnikova D. V., Mishchenko A. V. Metody i modeli upravleniya resursami proekta v usloviyakh neopredelennosti [Methods and Models of Project Resource Management in Conditions of Uncertainty]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* [Izvestiya of the Russian Academy of Sciences. Theory and Systems of Management], 2023, Vol. 2, No. 3, pp. 38–56. (In Russ.).

10. Lyakhov O. A. Model kalendarnogo planirovaniya proektov s pereraspredeleniem neskladiruemykh resursov [The Model of Calendar Planning in Projects with Redistribution of Non-Stock Resources]. *Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta – Ulan-Ude* [Bulletin of the Buryatskiy State University – Ulan-Ude], 2010, Issue 9, pp. 119–124. (In Russ.).

11. Lyakhov O. A. Resursy v setevom planirovanii slozhnykh kompleksov rabot [Resources in Net Planning of Complicated Complexes of Operations]. *Problemy informatiki* [Issues of Information Science], 2013, No. 1 (18), pp. 27–36. (In Russ.).

12. Mironov A. A., Tsurkov V. I. Transport-type Problems with a Minimax Criterion. *Automation and Remote Control*, 1995, Vol. 56 (12), No. 12, pp. 1752–1759.

Поступила: 11.11.2024

Принята к печати: 18.03.2025

Сведения об авторе

Олег Анатольевич Косоруков

доктор технических наук, профессор,
профессор Высшей школы управления
и инноваций МГУ имени М. В. Ломоносова;
профессор института математики, экономики
и информационных технологий РАНХиГС;
ведущий научный сотрудник кафедры
математических методов в экономике
РЭУ им. Г. В. Плеханова.

Адрес: ФГБОУ ВО «Московский
государственный университет имени
М. В. Ломоносова», 119991, Москва,
Ленинские горы, д. 1, стр. 51;
ФГБОУ ВО «Российская академия народного
хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации»,
119571, Москва, проспект Вернадского,
д. 82, стр. 1;
ФГБОУ ВО «Российский экономический
университет имени Г. В. Плеханова», 109992,
Москва, Стремянный пер., д. 36.
E-mail: kosorukovoa@mail.ru

Information about the author

Oleg A. Kosorukov

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Professor of the Higher School of Management
and Innovation of the Lomonosov Moscow
State University;
Professor of the Institute of Mathematics,
Economics and Information Technology
of the RANEPa;
Leading Researcher of the Department
of Mathematical Methods in Economics
of the PRUE.

Address: Lomonosov Moscow State University,
building 51, 1 Leninskie Gory, Moscow, 119991,
Russian Federation;
The Russian Presidential Academy of National
Economy and Public Administration,
building 1, 82 Vernadsky Avenue,
Moscow, 119571, Russian Federation;
Plekhanov Russian University
of Economics, 36 Stremyanny Lane,
Moscow, 109992, Russian Federation.
E-mail: kosorukovoa@mail.ru