ОСОБЕННОСТИ ЗАВИСИМОСТИ ДЮРАЦИИ МАКОЛЕЯ ОТ СРОКА ДО ПОГАШЕНИЯ

Попова Наталья Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова.
Адрес: ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова», 117997, Москва, Стремянный пер., д. 36.
E-mail: nat_popova_@mail.ru

Статья посвящена учету поведения показателя дюрации между купонными выплатами в зависимости этого показателя от срока до погашения. Вопрос о зависимости дюрации Маколея от срока до погашения с учетом поведения этого показателя между купонными платежами в существующей литературе не рассматривался. Установлено, что в течение купонного периода дюрация Маколея изменяется по линейному закону и в конце периода испытывает скачок, величина которого растет с увеличением срока до погашения для облигаций, продающихся с премией и по номиналу. Для облигаций, продающихся с дисконтом, величина скачка имеет максимум в области больших сроков до погашения. Получено математическое доказательство поведения величины скачка и его предельное значение. Приведенные вычисления подтверждают доказанные утверждения. Результаты работы позволяют уточнить зависимость дюрации Маколея от срока до погашения и дополняют теорию финансовых инвестиций с фиксированным доходом.
Ключевые слова: срок до погашения, дюрация Маколея, скачок дюрации, математические методы.

SPECIFIC FEATURES OF MACAULAY DURATION DEPENDENCE ON PERIOD TO REDEMPTION

Popova, Natalia V.
PhD, Assistant Professor, Professor of the Department for Higher Mathematics of the PRUE.
Address: Plekhanov Russian University of Economics, 36 Stremyanny Lane, Moscow, 117997, Russian Federation.
E-mail: nat_popova_@mail.ru

The article is devoted to taking into account the behavior of the duration indicator between coupon payments in dependence of this indicator from term to maturity. It was found that during the coupon period Macaulay duration varies linearly and at the end of the period duration has a jump, the value of which increases with the term to maturity for bonds sold with a premium and at par. For bonds that are sold at a discount, the value of the jump has a maximum in the region of large maturities. The mathematical proof of the behavior of the jump obtained. The calculations confirm the assertion proven. The results allow to clarify the dependence of Macaulay duration of the period to maturity and complement the theory of financial investments in fixed income.
Keywords: term to maturity, Macaulay's duration; jump of duration; mathematical methods.

Несмотря на ограниченность условий, при которых определен показатель дюрации Маколея, в настоящее время он востребован и в усовершенствованном виде используется в различных исследованиях [4]. Востребованность этого показателя объясняется, очевидно, его свойствами. Известно, что дюрация представляет собой вполне адекватную меру процентного риска облигации. Кроме того, дюрация Маколея – это средневзвешенный срок всех платежей по облигации.

Таким образом, дюрация – показатель важных для инвестирования характеристик облигации. В связи с этим исследования факторов, влияющих на показатель дюрации, представляют не только теоретический, но и практический интерес. Влияние основных факторов – доходности, купонной ставки и срока до погашения – на показатель дюрации рассмотрено в ряде работ [1; 2].

Остановимся на зависимости дюрации облигации от срока до погашения. В ряде работ [2; 3; 5] установлено поведение дюрации облигаций, продающихся по номиналу, с премией, с дисконтом. Для получения зависимости дюрации облигации от срока до погашения в этих работах рассматривалась дюрация облигаций, продающихся сразу после купонной выплаты. При этом поведение дюрации облигаций между купонными выплатами не рассматривалось.

Пусть D_n – дюрация облигации, платежи по которой выплачиваются m раз в году и до погашения которой остается n купонных периодов. Тогда при фиксированных значениях купонной ставки f и доходности к погашению r доказаны следующие утверждения [2]:

1) последовательность $\{D_n\}$ является сходящейся, причем $\lim\limits_{n\to\infty}\{D_n\} \approx (r+m)/mr$;

2) если $f \geq r$, то последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей (облигация продается по номиналу или с премией);

3) если $f < r$, то существует срок n_0 такой, что последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей при $n < n_0$ и убывающей при $n > n_0$ (облигация продается с дисконтом).

На рис. 1 и 2 показано поведение членов последовательности $\{D_n\}$ для случаев $f \geq r$ и $f < r$.

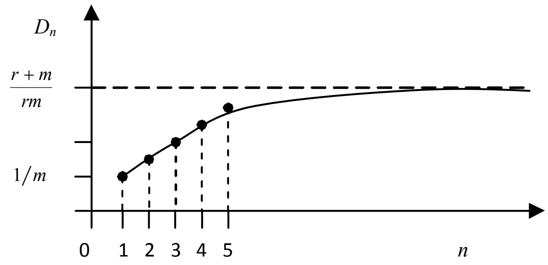

Рис. 1. Зависимость дюрации облигации $\{D_n\}$ от срока до погашения n ($f \geq r$)

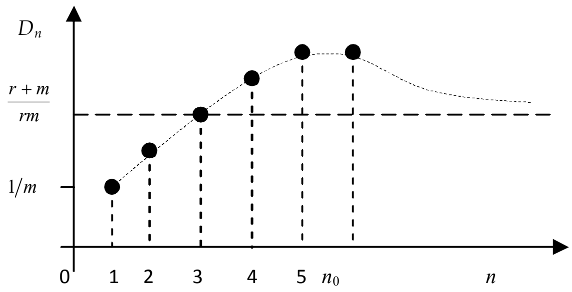

Рис. 2. Зависимость дюрации облигации $\{D_n\}$ от срока до погашения n ($f < r$)

Член последовательности D_n – дюрация облигации в момент сразу после купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных периодов (жирные точки на рисунках). В существующей литературе вопрос о зависимости дюрации облигации от срока до погашения с учетом поведения дюрации между купонными платежами не рассматривался. Цель нашей работы – учесть в зависимости дюрации облигации от срока до погашения ее поведение между купонными выплатами.

Поведение дюрации облигации между купонными выплатами можно учесть с помощью параметра τ. Это второстепенный параметр облигации. По определению τ – время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до момента купли-продажи.

Значения τ подчиняются неравенству $0 \le \tau < 1/m$, где $1/m$ – длина купонного периода. На практике τ не принимает значение, равное $1/m$. Таким образом, параметр τ измеряет время между двумя соседними купонными платежами. Начало купонного периода – это момент сразу после купонной выплаты, который соответствует значению $\tau = 0$. К концу купонного периода τ приближается к значению $1/m$. Предположим, что облигация продается через время τ после купонной выплаты, когда до погашения остается T лет и n купонных платежей. Тогда срок до погашения облигации (в годах) равен

$$T = n/m - \tau\,, \tag{1}$$

где $\tau \in [0, 1/m)$. В начале купонного периода срок до погашения облигации равен n/m лет, к концу купонного периода срок до погашения приближается к значению $(n-1)/m$ лет. В начале следующего купонного периода срок до погашения принимает значение $(n-1)/m$ лет. Таким образом, из (1) следует, что при увеличении τ от 0 до $1/m$ срок до погашения облигации уменьшается на один купонный период. Подчеркнем, что на каждом периоде параметр τ увеличивается в направлении уменьшения срока до погашения.

Рассмотрим поведение дюрации облигации в течение купонного периода между купонными выплатами. Дюрация купонной облигации определяется равенством

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{m}-\tau\right)\frac{fA/m}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \left(\frac{n}{m}-\tau\right)\frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{fA/m}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}.$$

Отсюда следует, что

$$D = D_n - \tau. \tag{2}$$

где $\tau \in [0, 1/m)$. Согласно (2) при фиксированном значении n дюрация облигации является линейной убывающей функцией параметра τ.

Из равенств (1) и (2) получаем выражение для зависимости дюрации облигации от срока до погашения:

$$D = D_n - n/m + T\,, \tag{3}$$

где $(n-1)/m < T \le n/m$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Согласно (3) при каждом фиксированном значении n на временном промежутке $\left((n-1)/m, n/m\right]$, т. е. в течение купонного периода, дюрация облигации является линейной возрастающей функцией срока до погашения T. С другой стороны, из выражения (3) следует, что при уменьшении срока до погашения на один купонный период, с n до $(n-1)$, дюрация облигации линейно уменьшается от значения D_n в начале периода и приближается к значению $(D_n - 1/m)$ в конце периода. В начале следующего купонного периода дюрация принимает значение D_{n-1}.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. При фиксированных r и f члены последовательности $\{D_n\}$ удовлетворяют неравенству $D_n - 1/m < D_{n-1}$, где $n \ge 2$.

Доказательство. Очевидно, что неравенство $D_n - 1/m < D_{n-1}$ эквивалентно неравенству $D_n - D_{n-1} < 1/m$. Докажем утверждение для случая $m = 1$. Для этого используем результаты, полученные автором ранее [2].

Имеем

$$D_n = \frac{f - fp^n + np^{n-1}a}{f(1-p) + p^{n-1}a},$$

где $p = 1/(1+r)$, $a = p(1-p)(r-f)$.

Тогда

$$D_n - D_{n-1} = \frac{B_n}{\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)\left(f(1-p)+p^{n-2}a\right)},$$

где $B_n = f^2(1-p)^2 p^{n-1} + fap^{n-2}(1-p)\big(1+np-(n-1)\big)+a^2p^{2n-3}$.

Отсюда

$$D_n - D_{n-1} = \frac{(1-p)^2\left(p^{n-1}f^2+p^{n-1}f(r-f)(2+np-n)+p^{2n-1}(r-f)^2\right)}{(1-p)^2\left(f^2+p^{n-1}f(r-f)(1+p)+p^{2n-1}(r-f)^2\right)}<1.$$

Действительно, так как $0 < p < 1$, то $p^{n-1} < 1$ и $(2+np-n)<(1+p)$, поскольку $(2+np-n)-(1+p)=-(n-1)(1-p)<0$ для $n \ge 2$. Утверждение доказано.

Заметим, что если $n = 1$, то D_1 – дюрация облигации за один купонный период до погашения, когда облигация становится чисто дисконтной. Тогда $D_1 = 1/m$. Значение D_0 – дюрация облигации в день погашения в момент сразу после выплаты последнего купона. Тогда $D_0 = 0$ и, следовательно, $D_1 - 1/m = 0 = D_0$.

Из доказанного утверждения следует, что так как $D_n - 1/m < D_{n-1}$ при $n \ge 2$, то с уменьшением срока до погашения в конце каждого купонного периода, за исключением последнего, когда $n = 1$, дюрация облигации испытывает скачок вверх. Для величины скачка ΔD_{n-1} докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. При фиксированных r и f скачок дюрации в точке $(n-1)/m$ равен $\Delta D_{n-1} = D_{n-1} - (D_n - 1/m)$.

Доказательство. Скачок функции $f(x)$ в точке x_0 равен по определению $|A-B|>0$, где $A = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Так как

$$\lim_{T\to(n-1)/m+0} D = \lim_{T\to(n-1)/m+0}\left(D_n - n/m+T\right) = D_n - 1/m,$$

$$\lim_{T\to(n-1)/m-0} D = \lim_{T\to(n-1)/m-0}\left(D_{n-1} - (n-1)/m+T\right) = D_{n-1},$$

где $D_n - 1/m < D_{n-1}$ при $n \ge 2$ по утверждению 1, то получим $\Delta D_{n-1} = D_{n-1} - (D_n - 1/m)$. Заметим, что $\Delta D_{n-1} > 0$ при $n \ge 2$ и $\Delta D_0 = 0$ при $n = 1$. Действительно,

$$\Delta D_0 = D_0 - (D_1 - 1/m) = 0 - (1/m - 1/m) = 0.$$

Утверждение доказано.

Замечание.

Выражение $\Delta D_{n-1} = D_{n-1} - (D_n - 1/m)$ для величины скачка дюрации в точке $(n-1)/m$ можно записать в виде

$$\Delta D_{n-1} = 1/m - (D_n - D_{n-1}). \qquad (4)$$

Рассмотрим зависимость величины скачка ΔD_{n-1} от n. Докажем следующую теорему.

Теорема. При фиксированных r и f справедливы следующие утверждения:

1. Последовательность $\{\Delta D_{n-1}\}$ является сходящейся.

2. Если $f \ge r$, то последовательность $\{\Delta D_{n-1}\}$ является возрастающей.

3. Если $f < r$, то существует срок n_Δ такой, что для облигаций с числом периодов до погашения $n < n_\Delta$ последовательность $\{\Delta D_{n-1}\}$ является возрастающей и убывающей при $n > n_\Delta$.

Доказательство.

1. Как уже отмечалось, члены последовательности $\{\Delta D_{n-1}\}$ положительны. Согласно [2], последовательность $\{D_n\}$ является сходящейся. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\{D_n\} = \lim\limits_{n\to\infty}\{D_{n-1}\}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(D_n - D_{n-1}) = 0$. Тогда из равенства (4) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{\Delta D_{n-1}\} = 1/m$. Заметим, что $1/m$ – длина купонного периода. Первое утверждение теоремы доказано.

2. Докажем, что при $f \ge r$ последовательность $\{\Delta D_{n-1}\}$ является возрастающей. Для этого необходимо показать, что $\Delta D_n - \Delta D_{n-1} > 0$. Из (4) следует, что

$$\Delta D_n - \Delta D_{n-1} = (D_n - D_{n-1}) - (D_{n+1} - D_n). \qquad (5)$$

Необходимо показать, что последовательность $\{D_n - D_{n-1}\}$ является убывающей.

Для доказательства используем результаты, полученные автором [2] для случая $m = 1$, где доказано, что при $f \geq r$ последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей. Следовательно, $\{D_n - D_{n-1}\}$ – положительная последовательность.

Имеем

$$D_n - D_{n-1} = \frac{B_n}{\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)\left(f(1-p)+p^{n-2}a\right)};\ D_{n+1} - D_n = \frac{B_{n+1}}{\left(f(1-p)+p^{n}a\right)\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)},$$

где $p = 1/(1+r)$;

$a = p(1-p)(r-f)$;

$B_n = f^2(1-p)^2 p^{n-1} + fap^{n-2}(1-p)\left(1+np-(n-1)\right)+a^2p^{2n-3}$;

$B_{n+1} = f^2(1-p)^2 p^{n} + fap^{n-1}(1-p)\left(1+(n+1)p-n\right)+a^2p^{2n-1}$.

Тогда

$$\left(D_n - D_{n-1}\right)-\left(D_{n+1}-D_n\right) =$$
$$= \frac{B_n}{\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)\left(f(1-p)+p^{n-2}a\right)} - \frac{B_{n+1}}{\left(f(1-p)+p^{n}a\right)\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)} =$$
$$= \frac{B_n\left(f(1-p)+p^n a\right)-B_{n+1}\left(f(1-p)+p^{n-2}a\right)}{\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)\left(f(1-p)+p^{n-2}a\right)\left(f(1-p)+p^{n}a\right)}.$$

Числитель полученной дроби преобразуется к виду

$$B_n\left(f(1-p)+p^n a\right)-B_{n+1}\left(f(1-p)+p^{n-2}a\right)=$$
$$=(1-p)\left(B_n\left(f+p^{n+1}(r-f)\right)-B_{n+1}\left(f+p^{n-1}(r-f)\right)\right)=$$
$$=(1-p)^2\left[f^2(r-f)(1+p)+\left(f+p^n(f-r)\right)\left(fr+nf(f-r)(1-p)\right)+p^n f(r-f)^2(1+p)\right]. \quad (6)$$

Убедимся, что при $f \geq r$ выражение в квадратных скобках равенства (6) положительно. Если $f = r$ (облигация продается по номиналу), то это выражение положительно для каждого n = 1, 2, … и равно $(1-p)^2 f^2 r$. Пусть теперь $f > r$ (облигация продается с премией). При $n = 1$ выражение в квадратных скобках равно

$$f^2(r-f)(1+p)+\left(f+p(f-r)\right)\left(fr+f(f-r)(1-p)\right)+pf(r-f)^2(1+p)=$$
$$=fr\left(pr+(1-p)f\right)>0.$$

Найдем производную по n от выражения в квадратных скобках равенства (6) (при дифференцировании n считаем непрерывной переменной):

$$\left(f^2(r-f)(1+p)+\left(f+p^n(f-r)\right)\left(fr+nf(f-r)(1-p)\right)+p^n f(r-f)^2(1+p)\right)' =$$
$$=f(f-r)\left(p^n \ln p\left(r+n(f-r)(1-p)\right)+\left(f+p^n(f-r)\right)(1-p)+p^n \ln p(f-r)(1+p)\right). \quad (7)$$

Найдем приблизительное значение этого выражения, учитывая, что $p=(1+r)^{-1}\approx 1-r$, $\ln p = \ln(1+r)^{-1}\approx -r$ и $p^n = (1+r)^{-n}\approx 1-nr$ для сроков $n < 1/r$. Тогда производная по n от выражения в квадратных скобках равенства (6) приблизительно равна

$$f(f-r)(n-1)r^3\left(1+n(f-r)\right)>0,$$

поскольку $f > r$ и $2 \le n < 1/r$. Для сроков $n \ge 1/r$ учтем, что так как $0 < p < 1$, то при достаточно больших значениях n множитель $p^n \ll 1$ и влиянием слагаемых, содержащих p^n, на знак всего выражения (7) можно пренебречь. Тогда это выражение приблизительно равно $f^2(f-r)(1-p) > 0$. Таким образом, при $f \ge r$ производная по n от выражения в квадратных скобках равенства (6) положительна. Значит, это выражение является возрастающей функцией n на множестве $n \ge 1$. Так как эта функция положительна при $n = 1$, то она положительна для каждого $n \in N$. Отсюда для $n = 1, 2, \ldots$ сразу следует неравенство

$$(D_n - D_{n-1}) - (D_{n+1} - D_n) > 0.$$

Значит, при $f \ge r$ разность $D_n - D_{n-1}$ является положительной убывающей последовательностью.

Тогда из выражения (5) следует, что $\Delta D_n - \Delta D_{n-1} > 0$ – последовательность $\{\Delta D_{n-1}\}$ является возрастающей, причем по утверждению 1 эта последовательность сходится, $\lim\limits_{n\to\infty}\{\Delta D_{n-1}\} = 1/m$. Утверждение доказано.

Согласно доказанному утверждению при $f \ge r$ скачок дюрации ΔD_{n-1} монотонно увеличивается с увеличением n, т. е. срока до погашения, от 0 при $n = 1$ до $1/m$ при $n \to \infty$.

В табл. 1 для случая $f > r$ приведены расчеты членов последовательности $\{D_n\}$, разностей $D_n - D_{n-1}$ и величины скачка ΔD_{n-1} по формуле (4).

Таблица 1

Зависимость величины скачка ΔD_{n-1} от n (случай $f > r$)

$f = 0,1;\ r = 0,08,\ m = 1$

n	D_{n-1}	D_n	$D_n - D_{n-1}$	ΔD_{n-1}
1	0	1,0000000	1,0000000	0
2	1,0000000	1,9105960	0,9105960	0,089403974
3	1,9105960	2,7423602	0,8317642	0,168235838
4	2,7423602	3,5042134	0,7618532	0,238146792
5	3,5042134	4,2037430	0,6995296	0,300470381
6	4,2037430	4,8474496	0,6437066	0,356293431
7	4,8474496	5,4409404	0,5934908	0,406509180
8	5,4409404	5,9890829	0,5481425	0,451857536
9	5,9890829	6,4961270	0,5070441	0,492955904
10	6,4961270	6,9658039	0,4696770	0,530323024
11	6,9658039	7,4014064	0,4356024	0,564397565
12	7,4014064	7,8058536	0,4044472	0,595552763
13	7,8058536	8,1817456	0,3758920	0,624108024
14	8,1817456	8,5314074	0,3496618	0,650338192
15	8,5314074	8,8569264	0,3255190	0,674481012
16	8,8569264	9,1601832	0,3032568	0,696743158
17	9,1601832	9,4428781	0,2826948	0,717305153
18	9,4428781	9,7065527	0,2636746	0,736325393
19	9,7065527	9,9526092	0,2460565	0,753943461
20	9,9526092	10,1823263	0,2297171	0,770282874
21	10,1823263	10,3968730	0,2145466	0,785453361
22	10,3968730	10,5973202	0,2004472	0,799552768
23	10,5973202	10,7846516	0,1873313	0,812668661
24	10,7846516	10,9597719	0,1751203	0,824879674
25	10,9597719	11,1235152	0,1637434	0,836256643

Расчеты показывают, что с увеличением n члены последовательности $\{\Delta D_{n-1}\}$ увеличиваются, приближаясь в пределе к длине купонного периода $1/m$ (1 году), что подтверждает доказанное утверждение.

На рис. 3 показано поведение дюрации облигации в течение каждого купонного периода в соответствии с уравнением (3) для n = 1, 2, 3, 4 для случая $f \geq r$. Рисунок следует рассматривать справа налево, т. е. в направлении уменьшения срока до погашения.

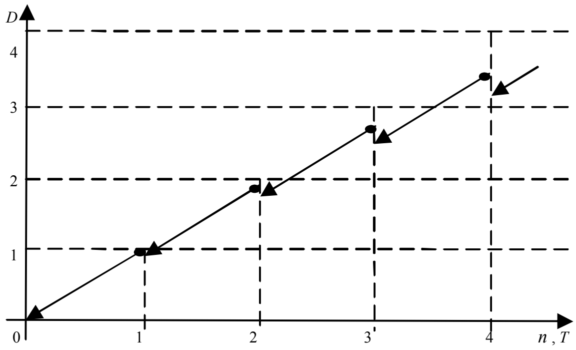

Рис. 3. Зависимость дюрации облигации D от срока до погашения T ($f \geq r$)

3. Докажем последнее утверждение теоремы. Рассмотрим зависимость величины скачка ΔD_{n-1} от n для случая $f < r$ (облигация продается с дисконтом). Согласно выражению (4) $\Delta D_{n-1} = 1/m - \left(D_n - D_{n-1}\right)$. Как уже установлено, поведение скачка ΔD_{n-1} связано с поведением разности $D_n - D_{n-1}$. Согласно работе [2] для последовательности $\{D_n\}$ при $f < r$ существует срок максимума дюрации n_0, такой, что для облигаций с числом периодов до погашения $n < n_0$ последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей и убывающей при $n > n_0$. Тогда разность $D_n - D_{n-1}$ ведет себя следующим образом: $D_n - D_{n-1} > 0$ при $n < n_0$; $D_n - D_{n-1} \approx 0$, когда $n - 1 \leq n_0 \leq n$ и $D_n - D_{n-1} < 0$ при $n > n_0$. Тогда из равенства (4) следует, что $\Delta D_{n-1} < 1/m$ при $n < n_0$, вблизи срока n_0 скачок $\Delta D_{n-1} \approx 1/m$, а при сроках до погашения $n > n_0$ величина скачка $\Delta D_{n-1} > 1/m$, поскольку при $n > n_0$ разность $D_n - D_{n-1} < 0$.

Исследуем на монотонность величину скачка ΔD_{n-1}. Чтобы установить знак разности $\Delta D_n - \Delta D_{n-1}$, необходимо исследовать знак равенства (6) для случая $f < r$. Равенство (6) запишем в виде:

$$B_n\left(f(1-p) + p^n a\right) - B_{n+1}\left(f(1-p) + p^{n-2} a\right) =$$
$$= (1-p)^2 \Big[f^2(r-f)(1+p) + f^2 r + n f^2 (f-r)(1-p) +$$
$$+ p^n f(r-f)\Big((r-f)(1+p) - r + n(r-f)(1-p)\Big)\Big]. \quad (8)$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках равенства (8). При n = 1 это выражение положительно и равно $fr\left(pr + (1-p)f\right) > 0$. Найдем значение этого выражения в области больших сроков, например, для срока $n > 2n_0$. Согласно [2]

$$n_0 \approx \frac{1}{r} + \frac{1+r}{r-f}. \quad (9)$$

Учтем, что так как $0 < p < 1$, то при достаточно больших значениях n множитель $p^n \ll 1$ и влиянием слагаемых, содержащих p^n, на знак всего выражения (8) можно пренебречь. Тогда для срока $n > 2n_0$ выражение в квадратных скобках равенства (8) отрицательно, поскольку оно меньше величины $-\dfrac{f^2 r(1+f)}{1+r} < 0$. Значит, существует срок n_Δ, когда разность $\Delta D_n - \Delta D_{n-1}$ меняет знак с «+» на «–», т. е. проходит через 0.

Это означает, что сначала последовательность $\left\{\Delta D_{n-1}\right\}$ является возрастающей, затем убывающей, причем по утверждению 1 эта последовательность сходится, $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{\Delta D_{n-1}\right\} = 1/m$.

Таким образом, установлено, что существует срок максимума скачка дюрации n_Δ.

Найдем приблизительное значение срока n_Δ. Поскольку $\Delta D_{n-1} \approx 1/m$ вблизи срока n_0 и в области сроков $n > n_0$ скачок $\Delta D_{n-1} > 1/m$, то срок максимума скачка $n_\Delta > n_0$. Приблизительное значение n_Δ можно найти из равенства (8). Учтем, что срок $n_\Delta > n_0$ располагается в области больших сроков до погашения, когда влиянием слагаемых, содержащих p^n, можно пренебречь. Срок n_Δ найдем из условия, что вблизи n_Δ разность $\Delta D_n - \Delta D_{n-1} \approx 0$. Тогда

$$n_\Delta \approx 1 + \frac{2}{r} + \frac{1+r}{r-f}. \quad (10)$$

Заметим, что $n_\Delta \approx 1 + \frac{1}{r} + n_0 > n_0$, причем сроки n_0 и n_Δ увеличиваются при сближении значений r и f.

Утверждение доказано.

Таким образом, если $f < r$, то величина скачка ΔD_{n-1} монотонно увеличивается с увеличением n от 0 при $n = 1$ до примерно $1/m$ вблизи срока n_0. При $n > n_0$ величина ΔD_{n-1} сначала увеличивается, достигая максимума в точке n_Δ, затем уменьшается в пределе до значения $1/m$. Заметим, что ΔD_{n-1} стремится к $1/m$, оставаясь больше $1/m$, поскольку при сроках до погашения $n > n_0$ величина скачка $\Delta D_{n-1} > 1/m$.

В табл. 2 приведены расчеты членов последовательности $\{D_n\}$, разностей $D_n - D_{n-1}$ и величины скачка ΔD_{n-1} для случая $f < r$. В таблице выделены строки, соответствующие максимуму дюрации и максимуму скачка дюрации. Вычисления показывают, что с увеличением n члены последовательности $\{\Delta D_{n-1}\}$ сначала увеличиваются, достигая максимума при n = 18, затем уменьшаются, оставаясь больше 1 (длины купонного периода), что подтверждает доказанное утверждение. Таким образом, согласно вычислениям $n_\Delta \approx 18$ лет (максимум скачка дюрации), по формуле (10) срок $n_\Delta \approx 15{,}25$ года. Заметим, что согласно вычислениям срок n_0 (максимум дюрации) составляет примерно 13 лет (по формуле (9) $n_0 \approx 10$ лет).

Таблица 2

Зависимость величины скачка ΔD_{n-1} от *n* (случай $f < r$)

$f = 0{,}05;\ r = 0{,}25;\ m = 1$

n	D_{n-1}	D_n	$D_n - D_{n-1}$	ΔD_{n-1}
1	0	1	1	0
2	1	1,897959184	0,89795918	0,102040816
3	1,897959	2,683257919	0,78529873	0,214701265
4	2,683258	3,350842418	0,6675845	0,332415500
5	3,350842	3,901523278	0,55068086	0,449319140
6	3,901523	4,341448849	0,43992557	0,560074429
7	4,341449	4,680937868	0,33948902	0,660510981
8	4,680938	4,932980044	0,25204218	0,747957824
9	4,93298	5,111724596	0,17874455	0,821255448
10	5,111725	5,231198355	0,11947376	0,880526241
11	5,231198	5,304378511	0,07318016	0,926819843
12	5,304379	5,342638241	0,03825973	0,961740270
13	5,342638	5,355512325	0,01287408	0,987125916
14	5,355512	5,350698152	–0,00481417	1,004814173
15	5,350698	5,334205505	–0,01649265	1,016492647
16	5,334206	5,310583021	–0,02362248	1,023622484
17	5,310583	5,283169365	–0,02741366	1,027413656
18	5,283169	5,254336208	–0,02883316	1,028833157
19	5,254336	5,225705169	–0,02863104	1,028631038
20	5,225705	5,198331356	–0,02737381	1,027373813
21	5,198331	5,172852642	–0,02547871	1,025478714
22	5,172853	5,149607439	–0,02324520	1,023245203
23	5,149607	5,128725288	–0,02088215	1,020882151
24	5,128725	5,110195040	–0,01853025	1,018530248
25	5,110195	5,093915128	–0,01627991	1,016279913

Таким образом, нами было рассмотрено поведение дюрации Маколея между купонными выплатами в течение срока до погашения облигации, доказано существование скачка вверх дюрации в конце каждого купонного периода, получено доказательство зависимости величины скачка от срока до погашения. Скачок вверх значений дюрации в конце купонного периода означает скачок чувствительности цены облигации к изменению рыночной процентной ставки, причем непосредственно перед купонной выплатой эта чувствительность снижена.

Величина скачка дюрации ΔD_{n-1} имеет предел при $n \to \infty$, равный длине купонного периода. Она увеличивается с увеличением срока до погашения для облигаций, продающихся по номиналу или с премией, и имеет максимум в области больших сроков до погашения для облигаций, продающихся с дисконтом. Это указывает на возрастающее влияние величины скачка на поведение членов последовательности $\{D_n\}$ в области больших сроков до погашения, что имеет значение для долгосрочных облигаций. Получено приблизительное значение срока максимума скачка дюрации. Результаты расчетов подтверждают доказанные утверждения.

Наличие скачков в поведении дюрации можно объяснить скачкообразным поведением цены купонной облигации в течение срока до погашения. Как известно, при фиксированных f и r цена облигации между купонными выплатами изменяется по показательному закону [1] и в конце каждого купонного периода испытывает скачок до значения котируемой цены в начале следующего купонного периода. По определению дюрация облигации связана с ценой облигации и, следовательно, должна иметь скачки в те же моменты времени, что и цена.

Учет поведения дюрации в течение купонного периода позволяет уточнить зависимость дюрации Маколея от срока до погашения: эта зависимость является линейной в течение каждого купонного периода и скачкообразной в течение срока до погашения. Результаты работы дополняют теорию финансовых инвестиций с фиксированным доходом.

Список литературы

1. *Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В. С.* Математические методы финансового анализа. – М. : АНКИЛ, 2006.
2. *Попова Н. В.* О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник финансового университета. – 2011. – № 1 (61). – С. 42–46.
3. *Hawawini G. A.* On the Mathematics of Macaulay's Duration: a Note. – URL: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf
4. *Kopprasch B.* Duration: A Practitioner's View // Journal of Applied Finance. – 2006. – February 16. – P. 138–143.
5. *Pianca* P. Maximum Duration of Below Par Bonds: A Closed-form Formula. – URL: http://ssrn.com/abstract=738445

References

1. Mel'nikov A. V., Popova N. V., Skornyakova V. S. Matematicheskie metody finansovogo analiza [Mathematic Methods of Finance Analysis]. Moscow, ANKIL, 2006. (In Russ.).
2. Popova N. V. O nekotorykh svoystvakh dyuratsii Makoleya [Concerning Certain Features of Macaulay Duration]. *Vestnik finansovogo universiteta* [Bulletin of the Finance University], 2011, No. 1 (61), pp. 42–46. (In Russ.).
3. Hawawini G. A. On the Mathematics of Macaulay's Duration: a Note. Available at: https://flora.insead.edu/fichiersti_wp/inseadwp1982/82-03.pdf
4. Kopprasch B. Duration: A Practitioner's View. *Journal of Applied Finance*, 2006, February 16, pp. 138–143.
5. Pianca P. Maximum Duration of Below Par Bonds: A Closed-form Formula. Available at: http://ssrn.com/abstract=738445